

ГЛАВА 3

РАСЧЕТЫ КОНСТРУКЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПЭВМ

Введение

3.1 Универсальные программы расчета конструкций

Историческая справка

Расчеты конструкций и связанные с ними задачи проектирования, оптимизации и управления – наиболее естественная сфера применения ЭВМ. Действительно, математические модели конструкций (статика, динамика, устойчивость, пластичность и ползучесть и др.) относятся к наиболее сложным и трудоемким в реализации. Деформирование тел характеризуется векторным полем перемещений (три компонента в каждой точке) и тензорными полями деформаций и напряжений (по шесть и девять компонентов в каждой точке), описывается пятнадцатью дифференциальными уравнениями. Исключая заранее часть неизвестных, приходят к трем уравнениям равновесия с тремя неизвестными перемещениями – тоже немало по сравнению с другими физическими задачами.

Уже первые серийные ЭВМ привлекали внимание проектировщиков, и в 60 – 70-е годы сформировался общий подход к разработке расчетных программ. Одним из основных компонентов такой программы на компьютерах 1 – 3 поколений стал ее *входной язык* – набор элементов расчетной схемы и команд для ее формирования, составляющих файл исходных данных. Фактически – язык программирования для программ формирования расчетных схем. Широко использовались программные комплексы Экспресс, ЛИРА, МИРАЖ; из зарубежных – SAP-80. Они содержали и графическую часть – изображение расчетной схемы и результатов расчета, но разделение графического и текстового режимов работы дисплея в операционной системе DOS не позволяло совместить подготовку данных с их визуализацией.

Сейчас наиболее популярны расчетные комплексы, работающие под операционной системой WINDOWS или UNIX: SCAD – наследник ЛИРЫ, американские COSMOS, ANSYS, NASTRAN.

Под WINDOWS весь процесс подготовки данных и анализа результатов расчета, а также текущая информация о процессе решения (который в

случае сложных расчетов может длиться минуты и часы) изображается на экране в виде рисунков и надписей – визуализируется. Пользователь, не откладывая, проверяет свои действия и сразу вносит коррективы. Стиль работы резко изменился: теперь уже не нужно тщательно готовить расчетную схему на бумаге, нумеровать узлы и элементы. Не слишком сложные строительные объекты можно «конструировать» и готовить к расчету прямо на компьютере, в пределах расчетной программы, ни разу не взяв в руки карандаш и бумагу. Правда, при этом теряется привычка аккуратно упорядочивать и архивировать информацию, необходимую при разработке больших проектов.

Однако почти во всех расчетных программах бросается в глаза то, что многие визуальные элементы унаследованы от традиционной системы с входными языками и используют далеко не все графические возможности WINDOWS, просто команды входного языка переделаны в пункты меню. Управляющие элементы (меню, панели с кнопками и др.) недостаточно структурированы, множество разных по смыслу и важности кнопок размещается на одной панели и выглядит одинаково, для ввода чисел выстроены цепочки безликих меню, хотя все поля для них можно разместить на одной панели и иллюстрировать рисунками как их смысл, так и вводимые данные (их местоположение, величины и направления). Трудно бывает найти нужные элементы расчетной схемы. Нумерация объектов не подстраивается под масштабы изображения, при мелком масштабе происходят накладки, что затрудняет ее прочтение.

Здесь есть над чем поработать.

Но много и удачных решений, в целом достигнут большой прогресс с точки зрения удобства для пользователя, повышенной наглядности и производительности при компьютерном моделировании конструкций.

Средства создания расчетной модели

В программном комплексе SCAD следует прежде всего отметить возможность сочетать составление простых расчетных схем на основе *прототипов* – встроенных в программу заготовок схем наиболее часто рассчитываемых конструкций или их частей – с возможностью задавать параметры (размеры, количество пролетов, этажей и др.). Привлекает также наличие баз данных сечений прокатных, гнутых и др. профилей элементов конструкций, характеристик материалов по российским стандартам.

Популярность SCADa основана также на унаследованном от ЛИРЫ соединении расчета с задачами проектирования: подбор сечений, армирование,

сейсмические и другие расчеты, требуемые СНиПами и сравнительно легко автоматизируемые.

SCAD позволяет наиболее наглядно, доступно редактировать и структурировать средства подготовки данных [4.1]. В отличие от других программ здесь имеются панели для изменения свойств узлов, конечных элементов и других частей расчетной схемы. Только многочисленные кнопки графических фильтров одинакового вида да спрятанные среди второстепенных кнопки «Схема управления», «ОК», «Отмена» и некоторые другие немного портят картину.

Комплексы COSMOS, ANSYS, NASTRAN (США) построены по примерно одинаковой схеме. Инструменты подготовки данных здесь в меньшей степени, но более четко структурированы, менее удобны средства редактирования и нет процедур проектирования. Однако можно использовать мощные средства подготовки расчетных схем конструкций самой разнообразной формы и степени сложности.

Основной порядок построения расчетной схемы: создание геометрической формы, определение свойств используемых конечных элементов, нанесение сеток из этих элементов-ячеек на построенные геометрические формы, задание внешних воздействий – геометрических связей и статических либо динамических нагрузок.

Геометрия конструкции строится последовательно из точек, линий, поверхностей, объемов. Параметрическое задание разнообразных криволинейных геометрических примитивов представлено в наглядной форме такими командами, как «extrude» – «вытянуть» поверхность из линии в направлении другой линии, «skin» – «натянуть» поверхность между двумя линиями и др. Используются многообразные (различные в разных программах) средства манипулирования геометрическими объектами: объединение, пересечение, создание линий на поверхности и т.д.

Свойства элементов во всех трех программах состоят из трех характеристик: типы (точки-пружины, стержни, пластины и оболочки, объемные элементы); вещественные параметры (геометрические характеристики сечения стержня, толщина оболочки и др); основные свойства материала (модуль упругости и коэффициент Пуассона) и дополнительные (плотность, коэффициент температурного расширения, дополнительные упругие коэффициенты в случае анизотропии, нелинейные (пластичность, гиперупругость) и реологические (ползучесть, релаксация)) свойства.

Нанесение сетки конечных элементов на геометрические формы превращает их в полноценные элементы конструкции, обладающие жесткостью и другими деформационными свойствами. Предусмотрено как автоматическое разбиение геометрических форм на элементы с большей плотностью сетки в местах возможной концентрации напряжений, так и заданное пользователем, который определяет либо максимальный размер элемента, либо количество разбиений каждой линии на границе объекта. Следует отметить, что автоматическое разбиение не всегда правильно срабатывает: программа может сообщить, что какой-нибудь элемент слишком вытянут или «скручен», и она не может продолжать решение. Тогда пользователь может выполнить кропотливую работу по поиску этого элемента и улучшению его формы за счет изменения координат узлов либо стереть автоматическую сетку и наносить свою пользовательскую, что более трудоемко.

После задания внешних воздействий конструкция готова к расчету. Для этой операции также существуют разнообразные средства. Сосредоточенные силы можно задавать в точках геометрической формы конструкции либо в узлах сетки. Лучше использовать точки, их немного и труднее перепутать. Распределенные силы задают на геометрических объектах (линиях, поверхностях, объемах) либо на конечных элементах, постоянные либо переменные, чаще всего с линейным изменением вдоль сторон объекта. Перемещения (геометрические связи) можно задать на геометрических объектах (точках, линиях, поверхностях, объемах) или в узлах сетки. В любом случае связи накладываются на узлы сетки.

Отделение геометрической модели конструкции от расчетной – сеточной – очень важно для высокой производительности расчетов. Нанесенную сетку всегда можно удалить и заменить более густой (для повышения точности) или более редкой (для ускорения счета). Во всех трех рассматриваемых программах предусмотрена возможность автоматического локального уточнения в окрестностях наиболее напряженных точек либо за счет сгущения сетки в этой окрестности (h -метод), либо за счет замены в ней конечных элементов на аналогичные с более высоким порядком аппроксимации (p -метод).

3.1.3. Решение дискретизованной задачи

Самая трудоемкая часть алгоритмов расчета конструкций (по затратам машинного времени) – решение системы линейных алгебраических уравнений. Во всех рассмотренных программах в качестве основного применяется

прямой метод Гаусса – последовательного исключения неизвестных или его модификаций, связанных с разложением матрицы коэффициентов на треугольные множители. При этом существенно используют разреженную структуру матрицы, т.е. редкое расположение ненулевых коэффициентов среди большинства нулевых. Для уменьшения количества операций и времени счета перед решением системы уравнений структуру матрицы улучшают за счет перенумерации неизвестных – минимизируют ее профиль из ненулевых коэффициентов, стремясь разместить их как можно ближе к главной диагонали, достигая значительного ускорения счета.

По некоторым оценкам, для больших систем сеточных уравнений значительно быстрее работают специально подобранные итерационные методы. Ускорение достигается не только за счет уменьшения количества вычислительных операций, но и за счет возможности обойтись без использования более медленной внешней памяти (магнитных дисков). В программе COSMOS реализован такой вариант для частного случая конструкций из оболочечных элементов.

Решение двух–трех сотен тысяч уравнений в пределах получаса на компьютерах типа IBM PC с тактовой частотой 500–1000 МГц в настоящее время – обычное дело.

3.1.4. Средства изображения, анализа и документирования результатов расчета – постпроцессоры

Для наглядного изображения и анализа, осмысливания напряженно-деформированного состояния (НДС) пространственных конструкций вместо традиционных эпюр используют набор «контурных» и «векторных» графических способов, привязанных так же, как и эпюры, к пространственным изображениям конструкции. Наиболее наглядны и информативны из них – деформированная схема и представленные разными цветами изолинии (изополосы) нужных компонентов полей НДС, нанесенные на пространственную схему конструкции. Наряду с нормальными и касательными напряжениями, линейными и угловыми деформациями в различных системах координат рассматриваемые программы изображают усредненные характеристики НДС – главные напряжения и деформации, интенсивности касательных напряжений и деформаций сдвига, эквивалентные напряжения по Мизесу.

Для анализа внутренних невидимых частей конструкции используют средства *выбора* (select) нужных групп элементов и изображения их НДС.

Эти средства визуализации, сжатого пакетирования информации, позволяют анализировать схемы деформирования, силовые потоки и другие характеристики работы конструкции, проверять ограничения прочности, жесткости, устойчивости, вырабатывать представления о ее особенностях и необходимости конструктивных изменений, не прибегая к осмысливанию результатов расчета в виде огромных числовых таблиц.

Предусмотрена возможность печати графических изображений, однако в настоящее время проще использовать копии экрана, обрабатывая их графическими редакторами (например, Paint, MS Photo Editor) и вставляя в отчетные или проектные документы.

Иногда нельзя обойтись и без традиционной табличной формы. Расчетные программы позволяют просматривать таблицы перемещений, напряжений и деформаций в узлах и конечных элементах для всей конструкции или ее частей, находить наибольшие и наименьшие значения.

3.1.5. Недостатки имеющихся расчетных комплексов

Интерфейс. Современные графические операционные системы (Windows, Linux и др.) содержат идеологию, сценарии работы и предоставляют средства *визуализации* для максимально удобного и наглядного представления информации в разнообразных формах (рисунки, таблицы, движущиеся объекты). При этом происходит ее *сжатие*, пакетирование в максимально полном объеме в ограниченных пределах экрана дисплея. В этих благоприятных условиях хороший интерфейс должен обладать тремя необходимыми свойствами.

1. Размещать на экране максимум информации в максимально наглядном виде, многоуровневом и хорошо структурированном: главные разделы на переднем плане, остальные – частично показывают на задних. Значительно ускоряет работу *показ* данных в контексте, одновременно повышая их надежность и достоверность: программа должна на следующем шаге предлагать для обработки те данные, которые с наибольшей вероятностью выберет пользователь.

2. Иметь средства изображения и редактирования вводимых или анализируемых данных, формирования документа для печати. На современных компьютерах ничего не стоит использовать содержимое экрана в качестве части документа; речь идет о формировании вида экрана, размещении на нем

необходимых рисунков и надписей, получении для этого информации от программы.

3. Осуществлять максимальный программный контроль вводимой информации, обнаруживая противоречия (например, геометрическую изменяемость системы) и предупреждая об этом расчетчика, и максимальный пользовательский контроль, оперативно и наглядно изображая вводимые данные.

По сравнению с более широко используемыми программами общего, производственного и коммерческого назначения (например, MS Office) в интерфейсах имеющихся расчетных программ (т.е. в препроцессоре и постпроцессоре) использована лишь малая часть этих возможностей. Для начинающего пользователя любая из них представляет собой лабиринт с множеством возможных путей, большинство из которых ведет в тупик.

Например, в SCADe размещение главного меню в отдельном окне в виде «дерева» имеет свои достоинства, но до получения определенных навыков приходится очень долго искать кнопку (среди других кнопок такого же вида), возвращающую в это главное меню из текущих окон. А для определения и проверки вида и направлений наклонных связей придется добывать необходимую информацию о местной системе координат узла и самому их рисовать, затрачивая время и делая ошибки при ручной работе.

В других программах многие данные вводятся по одному числу, для каждого из которых нужно проходить по цепочке меню, иногда достаточно длинной, вместо того чтобы заполнять таблицы значений. Иногда нельзя одновременно задать даже все три компонента вектора силы или вектора перемещений. После задания величин они отображаются графически на экране, но для исправления нужно их ввести заново, повторяя весь процесс ввода и не видя старых значений. Хотя программисту ничего не стоит средствами Windows открывать для исправлений диалоговое окно с необходимыми рисунками и отредактированными числовыми полями, в котором пользователь будет видеть предыдущие данные и результаты исправления в числовом и графическом виде.

Все программы сообщают о неполноте данных или других противоречиях лишь при запуске на счет, причем с минимальной информацией о характере и местах ошибок.

Результаты расчета программы пытаются формировать сами (хотя пользователь может предварительно делать некоторые настройки). Но определить значимость отображаемых чисел и разместить их без наложений – слишком сложная задача для современного (не очень интеллектуального) компьютера,

и следовало бы эту работу доверить пользователю, снабдив его необходимыми средствами получения данных от программы и возможностью их размещения на фоне расчетной или деформированной схемы конструкции – для последующего анализа и документирования.

Не сообщают они и об оценках точности полученных результатов, хотя МКЭ – сугубо приближенный метод расчета.

Универсальность и точность. Практически для любой расчетной программы находятся простые и важные конструкции, не вписывающиеся в предусмотренные в ней расчетные схемы.

Например, в программе COSMOS не предусмотрен расчет на упругом основании. Конечно, Винклерово основание можно моделировать одномерными упругими конечными элементами, присоединенными к каждому узлу конструкции на поверхности контакта с основанием, но в ряде случаев это связано со слишком большим объемом работы. Кроме того, COSMOS не выполняет расчет плиты, шарнирно закрепленной по контуру, сообщая о нулевом определителе системы. Вероятно, это связано со свойствами используемого конечного элемента плиты, имеющего в узлах степень свободы – поворот вокруг нормали к срединной поверхности. Добавление соответствующей связи в одном из узлов спасает положение, но тогда остается неясным вопрос о правильности расчета, так как такая связь избыточна; пользователь – расчетчик не должен заниматься такими вопросами, они должны быть решены разработчиками при программировании, и программа должна сама ставить такого рода вспомогательные связи, если это необходимо и возможно.

В программе ANSYS поверхностно распределенные внешние силы можно задать только по нормали к поверхности. Это мешает, например, учету собственного веса и снеговых нагрузок на оболочки. Правда, можно использовать гравитационные нагрузки, но это в ряде случаев неудобно. В расчете пересекающихся пластин (рис. 3.1) максимальные напряжения, вычисленные в узлах и вычисленные в центрах тяжести конечных элементов, отличаются вдвое. Очевидно, это связано с разрывностью напряжений на линии

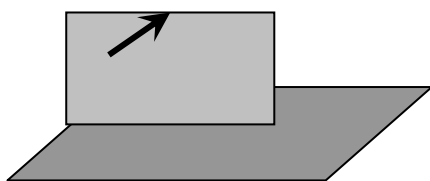


Рис. 3.1. Фрагмент пересекающихся пластин

пересечения, и в этом вопросе можно разобраться, но зачем его оставлять пользователю, который может и не заметить противоречия?

В программе NASTRAN для пластин и оболочек не предусмотрены переменные по толщине температурные воздействия, это

противоречит основной для тонкостенных конструкций линейной по толщине аппроксимации перемещений. Конечно, температуры на лицевых поверхностях тонкой оболочки мало отличаются, но их малая разница вызывает большое искривление, что в ряде случаев является главной целью расчета.

В программе SCAD большие погрешности (уменьшение прогибов в десятки и сотни раз) дают удлиненные пространственные и пластинчатые конечные элементы (рис. 3.2, *а*, *б*), как хорошо известно из литературы по МКЭ. Это неудобно при расчете ребристых плит и оболочек. В ряде случаев ребра прямоугольной формы лучше задавать в виде элементов пластины (рис. 3.2, *в*), чем в виде эксцентрично присоединенных стержней. Это не только избавляет от трудоемкой работы с «жесткими вставками», но и повышает точность за счет автоматического учета поперечного сдвига. В трех упомянутых американских программах удлиненные стержни и ребра из конечных элементов (КЭ) плиты дают точность не худшую, чем стержневые КЭ, за счет использования гибридного способа их построения, близкого по смыслу к моментной схеме конечных элементов, предложенной А.С. Сахаровым. Правда, в COSMOSe и NASTRANe есть возможность применить КЭ с точным интегрированием, дающие точно такие же результаты, как в SCADe, или КЭ с сокращенным интегрированием, дающие систему уравнений с нулевым определителем, но по умолчанию используются лучшие – гибридные – КЭ. Критика коммерческих программных комплексов расчета конструкций имеется также в [4.2].

Конечно, математические модели механики деформируемого твердого тела и расчетов конструкций относятся к самым сложным задачам расчета, и здесь неизбежны отдельные недоработки. Хотелось бы только, чтобы они иногда исправлялись.

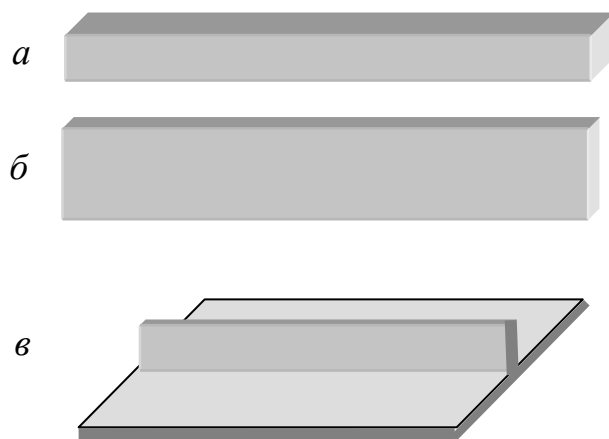


Рис.3.2. Фрагмент пластины, эксцентрично подкрепленной ребром

3.1.6. Цели и возможности использования программных комплексов в учебном процессе

При изучении дисциплин, связанных с расчетом конструкций, прорабатываются два основных момента.

Первый – овладение системой понятий, описывающих деформирование и прочность: деформации, напряжения, внутренние усилия, силовые потоки и др., составляющие основу математических моделей конструкций. На это направлена учебная деятельность, состоящая в решении небольших учебных задач с анализом на основе этих понятий.

Второй – выработка инженерной интуиции: как ведут себя различные конструкции в тех или иных условиях. Это достигается анализом особенностей различных конструкций на большом количестве примеров. Здесь и необходимы хорошие программы для быстрого расчета вариантов и осмысливания полученных результатов, включая некоторые исследовательские задачи о влиянии на НДС того или иного параметра конструкции, а также переход к оптимизации.

Рассмотренные программные комплексы SCAD, COSMOS, ANSYS, NASTRAN представляют для этого широкий набор средств. Трудность только в том, что в них использованы далеко не все имеющиеся на современных компьютерах резервы улучшения «дружественности» к пользователю, и требуется много времени на их изучение, которого в учебных планах нет.

Учитывая повышенный интерес студентов к таким программным средствам, можно использовать факультативное изучение этих программ. При этом расширяется кругозор студентов, понимание принципов построения таких комплексов. Владение одной программой позволяет относительно легко осваивать и другие.

Главное, что достигается при использовании хороших расчетных моделей и программ, – выработка активного подхода к конструкции на основе понимания ее работы.

Актуален и вопрос о разработке простого в использовании и обладающего большими возможностями линейного и нелинейного анализа конструкций программного комплекса: «включил – и пользуешься». На сегодняшнем уровне развития моделей механики конструкций, компьютерной техники и средств программирования такая задача вполне выполнима.

3.2. Инженерное осмысление полученных результатов

Известно, что применение вычислительной техники открыло новую эру для расчета, анализа и эффективного применения конструкций.

50-60 лет тому назад квалификационный уровень специалиста могли определять по тому, какой сложности раму он может рассчитывать.

Сейчас с помощью разработанных компьютерных программ студенты рассчитывают весьма сложные конструкции, действуя в соответствии с инструкциями к этим программам. Изменились инструменты (компьютер) и методы расчета, но суть строительной механики, ее природа (свойства, игра сил, достоверность и эффективность результата) осталась прежней, классической, ею пренебрегать нельзя. Просто обучать студентов пользованию компьютерными программами для расчета, не уделяя должного внимания строительной механике, теории упругости, пластичности, пространственным тонкостенным системам. А такая тенденция, к сожалению, есть, особенно среди расчетчиков-проектировщиков. Такие люди слепы, не видят своих просчетов и не могут добиться эффективных результатов. Преувеличивая роль инструмента (компьютера), они принижают значение и возможности механики и всего строительства. Рассмотрим смысл этих слов и выскажем некоторые рекомендации.

1. Первоначальная (основополагающая) роль строительной механики состоит в умении выбрать выгодную рациональную систему и сформулировать (поставить) задачу для ее расчета. Это классическая неподдающаяся формализации постановочная часть проектирования не может быть заменена компьютерами. Выбор типа физической модели и расчетной схемы (разумных упрощений, гипотез, идеализации), а также определение целей и задач (включая оптимизацию) с анализом результатов, которые должны дать пищу для последующего цикла действий, – все эти вопросы останутся за механикой. Обучение всецело остается инженерным искусством, овладению которым помогает опыт расчетов, проектирования, экспериментов.

2. Как избежать ошибок при компьютерных расчетах? Как убедиться в достоверности полученных результатов НДС конструкции? Ведь существует предубеждение: расчет сделан на ЭВМ, значит, он верен! Этот житейский психологический стереотип не имеет ничего общего с наукой, со строительной механикой.

Общие правила (рекомендации)

Необходимо опираться:

- на знания теории и методов строительной механики, на которых основана постановка задачи, в том числе выбор расчетной схемы;
- знание и понимание используемой компьютерной программы и инструкции пользователю, в том числе, какой именно метод заложен в программу расчета, какие используются конечные элементы и т.д.;
- анализ достоверности и точности решения и проверку результатов расчета, которые должны основываться на знании теории и методов строительной механики и теории упругости и пластичности. Если не знаешь, каким методом (например, методом сил или методом перемещений) сделан расчет, то какие проверки расчета делать? Какие из них (статические или геометрические) будут достаточны?

Без отчетливого представления этих трех взаимосвязанных сторон процесса постановки задачи, ее решения и оценки результатов нельзя быть уверенным в достоверности того, что решено и как.

Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Выбор расчетной схемы является определяющим в постановке задачи. Здесь закладываются принципиальные основы соответствия расчетной схемы действительной конструкции. Например, многие связи принимаются абсолютно жесткими, хотя в действительности они упругие. Можно (и целесообразно) в последующем уточнении расчетной схемы заменить их на упругие связи. (Например, учесть податливость затяжек или податливость основания и т.п.).

Иными словами, вдумчивый расчетчик-исследователь сделает ряд расчетов с уточнением расчетных схем. По каждой расчетной схеме можно вычислить невязку, отражающую несоответствие идеализации (см. гл. 1 «Регулирование, синтез, оптимизация»), а затем выявить влияние невязки на НДС.

Большое значение имеет умение анализировать геометрическую неизменяемость рассматриваемой системы, определять количество и качество распределения связей. Ошибки в этом приводят к тому, что задача вообще не решается или рассчитывается не та система. Недостаток связей не позволяет составить необходимый набор уравнений равновесия, и программа не работает. В некоторых случаях избыток связей приведет к тому, что некоторый элемент системы не работает (усилие в нем оказывается равным нулю). Например, если вдоль затяжки поставить с двух сторон продольные абсолютно жесткие связи, то затяжка работать не будет.

Одним из важнейших аспектов современного обучения, благодаря средствам компьютеризации, явилась возможность использования пространственных расчетных схем сооружений, которые позволяют:

- значительно приблизить расчетные схемы к действительной работе конструкции и полнее включать прогрессивный эффект несущих свойств конструкции благодаря учету пространственного перераспределения напряженно-деформированного состояния. Особое значение это имеет при рассмотрении здания или сооружения как цельной связанной системы: «верхнее строение – фундамент – основание». В случае особых грунтовых условий, например, неравномерных просадок грунтов и др., такой пространственный системный расчет является крайне необходимым;

- при неравномерных нагрузках, в том числе и при локальных загружениях отдельных частей сооружения, используя пространственный системный расчет, выявить живучесть и реальные свойства конструкции.

Примечание. Авторам приходится встречаться с тем, что подобные расчеты на компьютерах часто выполняются при редкой сетке без анализа точности решения, что приводит нередко к ошибочным оценкам.

По вопросу проверки решений:

- Большинство компьютерных программ основано на методе перемещений. Поэтому проверками является выполнение условий равновесия узлов, частей и всей системы (соответствие реакций приложенным нагрузкам).
- Если система и нагрузки на ней симметричны, то напряженно-деформированное состояние соответственно должно быть симметричным.

Некоторые практические рекомендации начинающим пользователям компьютерных программ для расчета

Исходная концепция.

Весьма часто метод расчета, характеристики используемых конечных элементов и т.д. пользователю не известны и он руководствуется только инструкцией к программе. Как практически выходить из этой ситуации?

- Выберите ясный простой тестовый пример, по которому Вам известно решение и сделайте расчет по программе. Сравнение научит Вас кое-чему, а главное, создаст определенную уверенность в последующих расчетах. Так, подбирая некоторые характерные текстовые задачи, можно обучаться

пользованию программой. Назовем это **обучением на примерах пользователя программы**, которая является «черным ящиком». Если обучающая выборка примеров достаточна, то можно надеяться на удовлетворительный результат обучения.

- Пусть Вы должны решить следующую новую для Вас задачу. Не бросайтесь сразу решать ее. Кажущаяся возможность быстроты обернется впоследствии потерями времени на поиск и исправление ошибок и вызовет неуверенность в результате. Целесообразно как можно больше упростить эту задачу, разбить ее на несколько более простых, поддающихся Вашему контролю, и решать их. Так приобретается опыт пользования программой и уверенность в результате. Если и потом сложная задача не решается или вызывает сомнения, необходимо посмотреть, все ли более простые задачи, входящие в нее или близкие ей, рассмотрены. Такой последовательный постепенный путь обязательно приведет к результату.

- Развивайте свою инженерную интуицию, обосновывая ее на опыте ранее решенных задач, на знании теории и принципов механики. Так, например, полезно построить и сравнить деформированный вид рамы (по растянутым волокнам с видом эпюры изгибающих моментов, с характером направления внешней нагрузки).

Возможные ситуации (сбои) компьютерного расчета и комментарии к ним

1. Задача, введенная в компьютер, не решается.

Возможные причины:

- не выполнены все указания по вводу информации согласно инструкции и программе;
- не введены все связи, обеспечивающие геометрическую неизменяемость системы. Например, расчет плоской системы (фермы, рамы) по алгоритму расчета для пространственных систем требует введения связей из плоскости системы, а также для предотвращения ее смещения как жесткого целого;
- по-видимому, есть еще много других причин.

2. Задача решилась. Компьютер выдал решение. Вы успокоились. Но не рано ли?

Вполне возможно, что решена не та задача, т.е. надо проверить и убедиться в соответствии исходных данных (нагрузки, расчетной схемы связей,

параметров жесткости, размеров), а затем сделать проверку равновесия узлов, частей, опорных реакций и т.п.

3. С какой точностью получено решение на основе метода конечных разностей (МКР) или конечных элементов?

На вопрос о точности численного решения МКР можно получить ответ на основе анализа сходимости решения, т.е. путем сравнения нескольких решений при разной густоте сетки (разном числе конечных элементов) и проследить сходимость. Весьма часто при редкой сетке получается малая точность решения

3.2.1 Примеры расчета строительных конструкций на статические воздействия

Для расчетов воспользуемся программным комплексом Structure CAD (ПК SCAD), предназначенном для численного исследования на ЭВМ широкого класса конструкций на различные виды внешних воздействий (статическая и динамическая нагрузка, температурные воздействия и т.д.). В основу алгоритма данного комплекса положен метод конечных элементов, реализованный в форме метода перемещений, т.е. физические и геометрические условия принципиально учтены в разрешающих уравнениях, достаточно проверить выполнение условий равновесия.

Исходные данные для расчета конструкции (геометрические размеры, опорные закрепления, жесткости элементов, положение и величина нагрузки) вводятся с клавиатуры с одновременным контролем (на экране высвечивается расчетная схема с введенными нагрузками). Результаты расчета (усилия, напряжения, деформации, перемещения) выдаются в виде таблиц, а также в виде эпюр для стержневых систем или полей напряжений для пластинчатых систем.

Как показывает опыт, навыки исполнения формализованных процедур, предусматриваемых инструкциями для пользователя программными комплексами, обучающимися любых форм и уровней подготовки успешно приобретаются, для этого следует рассмотреть одну – две типовые задачи. Однако более важный процесс - осмысления (оценки) полученных результатов обучающимися исполняется плохо. С одной стороны, они находятся под психологическим прессингом: ЭВМ не может дать ошибочных результатов, с другой - в учебной литературе не разбираются примеры возможных оши-

бочных решений с оценкой порождающих их причин. К ошибочным решениям относятся решения, дающие неверный результат за счет сбоя ПЭВМ, или решения с неудовлетворительной точностью за счет использования необоснованно грубых расчетных схем или математических моделей, а также формально правильные решения (в вычислительном аспекте правильно исполнены ПЭВМ), но с ошибками исходной информации по рассматриваемой задаче.

Далее на конкретных примерах проиллюстрируем порядок анализа полученных на ПЭВМ результатов.

Пример 1. Рассчитать плоскую раму (рис. 3.3) на ПЭВМ с использованием ПК SCAD при $J_2=2J_1$ и проанализировать полученные результаты. Оценить влияние соотношения жесткостей J_1/J_2 на напряженно - деформированное состояние (НДС) системы.

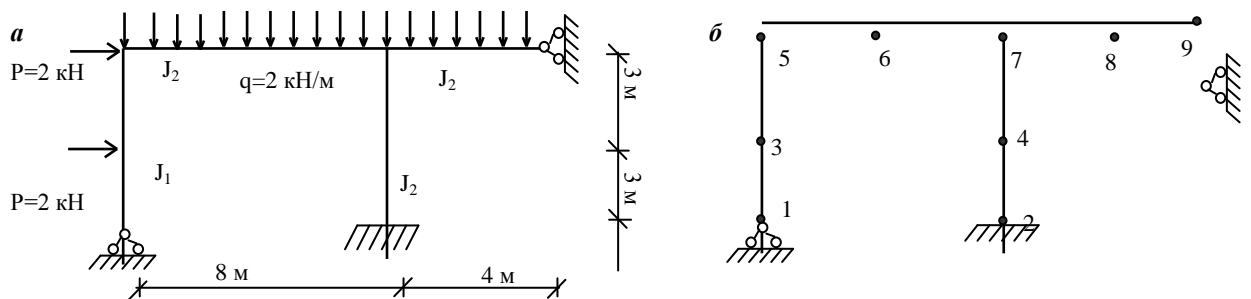


Рис.3.3. Плоская рама:

a – расчетная схема; *б* – конечно элементная модель

Решение. На рис. 3.4 изображены эпюры усилий M, Q, N для заданной системы ($E=4 \cdot 10^7$ кН/м²; $F_1=20 \cdot 20$ см², $F_2=40 \cdot 20$ см²).

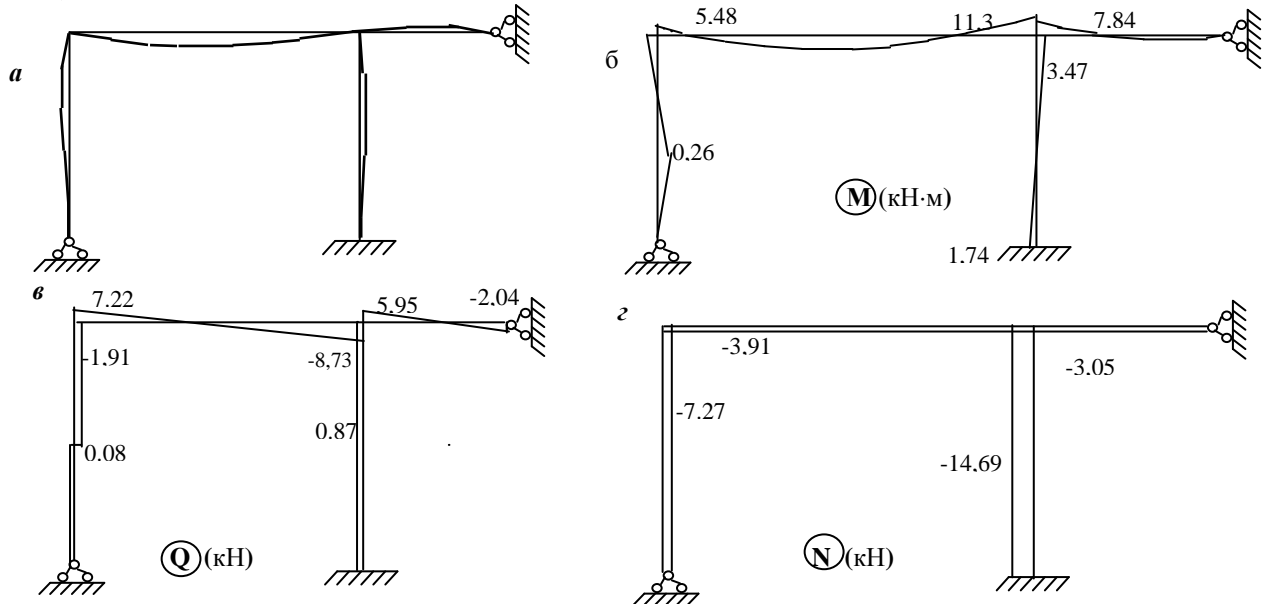


Рис. 3.4. Результаты расчета плоской рамы при $J_2=2J_1$:

a – деформированная схема; *б, в, г* – эпюры внутренних усилий

Анализ полученных результатов. Деформированная схема (рис. 3.4, а) не противоречит заданной нагрузке. Проверка выполнения условий равновесия: на рис.3.5, а,б рассматривается равновесие узлов 5, 7, на рис. 3.5, в – равновесие всей системы. Статические проверки выполняются, можно полагать, что полученный результат соответствует истинному распределению усилий в сооружении от заданной нагрузки. Полученные результаты практически совпадают с результатами ручного счета (максимальные расхождения по усилиям не превышают 1%), выполненного методом перемещений без учета продольных деформаций.

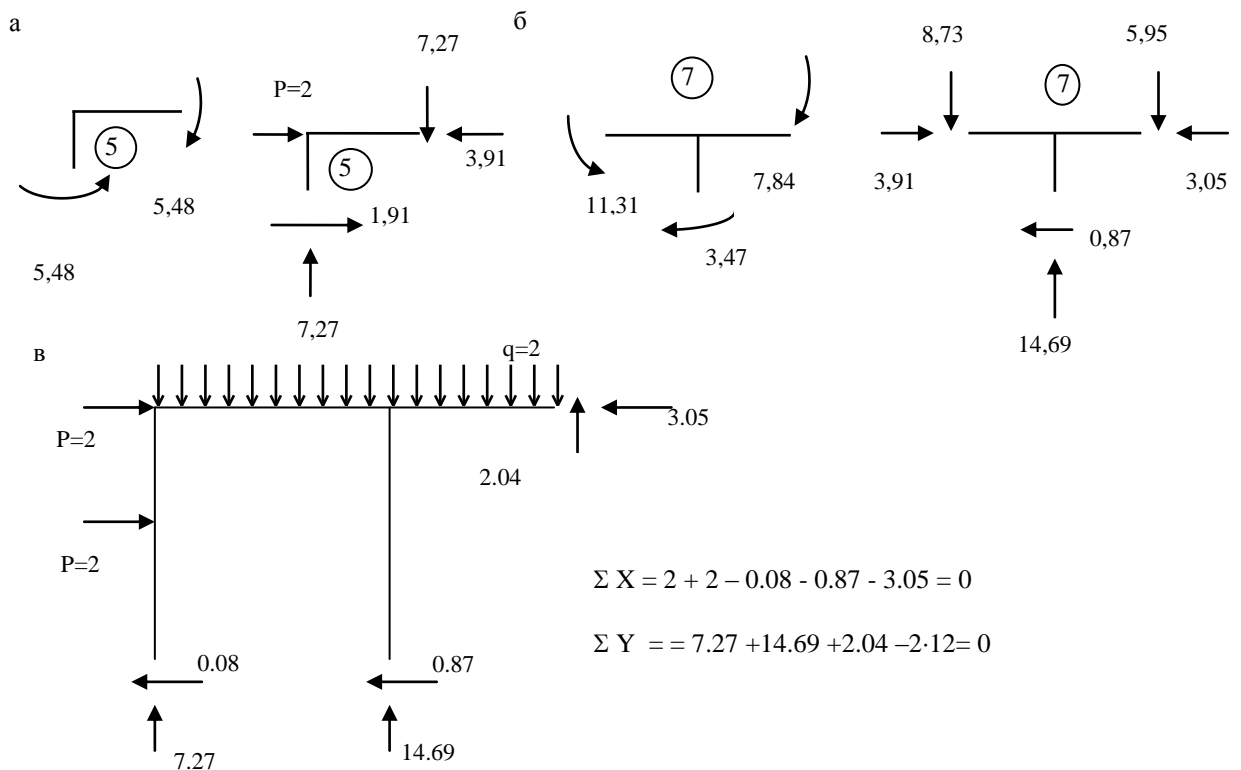


Рис. 3.5. К статической проверке :

а , б – узлов 5, 7; в – всей системы

С изменением жесткости элементов конструкции при сохранении заданного соотношения $J_2=2J_1$ перераспределение усилий не существенно (табл.3.1).

В табл. 3.2 представлено сравнение величины изгибающих моментов в сечениях заданной рамы, посчитанных при различных соотношениях $k=J_1/J_2$

Таблица 3.1

Изгибающие моменты (кНм) при постоянном соотношении жесткостей

Сечение (узел)	$J_2=2J_1$ *)	$F_1=40\cdot40 \text{ см}^2$	$F_1= 30\cdot30 \text{ см}^2$	$F_1=20\cdot20 \text{ см}^2$	$F_1=10\cdot10 \text{ см}^2$	$F_1=5\cdot5 \text{ см}^2$
		$F_2=80\cdot40 \text{ см}^2$	$F_2= 60\cdot30 \text{ см}^2$	$F_2=40\cdot20 \text{ см}^2$	$F_2=20\cdot10 \text{ см}^2$	$F_2=10\cdot5 \text{ см}^2$
		$J_1 =2 J_2$	$J_1=2 J_2$	$J_1=2 J_2$	$J_1=2 J_2$	$J_1=2 J_2$
3	0,257	0,26	0,26	0,26	0,26	0,26
5	5,486	5,48	5,48	5,48	5,49	5,42
6	7,597	7,75	7,74	7,73	7,73	7,89
7 ^{левое}	11,32	11,28	11,30	11,31	11,32	11,42
7 ^{правое}	7,875	7,74	7,80	7,84	7,87	7,82
7 ^{нижнее}	3,445	3,54	3,50	3,47	3,45	3,59
8	0,063	1,07	1,05	1,04	1,03	1,04

Примечание: *) - без учета продольных деформаций

Таблица 3.2

Изгибающие моменты (кНм) при переменном соотношении жесткостей

Сечение (узел)	$F_1= 40\cdot40 \text{ см}^2$	$F_1=30\cdot40 \text{ см}^2$	$F_1= 20\cdot40 \text{ см}^2$	$F_1= 10\cdot40 \text{ см}^2$	$F_1= 5\cdot40 \text{ см}^2$
	$F_2= 80\cdot40 \text{ см}^2$	$F_2=80\cdot40 \text{ см}^2$	$F_2= 80\cdot40 \text{ см}^2$	$F_2= 80\cdot40 \text{ см}^2$	$F_2= 80\cdot40 \text{ см}^2$
	$EJ_1=0.85\cdot10^5$	$EJ_1= 6,4\cdot10^4$	$EJ_1= 4,20\cdot10^4$	$EJ_1=2,14\cdot10^3$	$EJ_1=1,07\cdot10^4$
	$J_1/J_2= 0.5$	$J_1/J_2= 0.375$	$J_1/J_2= 0.25$	$J_1/J_2= 0.125$	$J_1/J_2= 0.0625$
3	0,26	0,55	0,91	1,34	1,60
5	5,48	4,80	4,19	3,31	2,79
6	7,75	7,96	8,21	8,50	8,64
7 ^{левое}	11,28	11,52	11,83	12,25	12,60
7 ^{правое}	7,74	7,87	8,03	8,25	8,44
7 ^{нижнее}	3,54	3,66	3,80	4,00	4,17
8	1,07	1,03	0,99	0,94	0,89

Из табл. 3.2 следует: с уменьшением жесткости левой стойки происходит значительное перераспределение усилий: изгибающие моменты в узле

5 уменьшаются, в узлах 6, 7 – увеличиваются (сказывается снижение подерживающего эффекта левой стойки).

На рис. 3.6 представлена эпюра изгибающих моментов при $J_1=0$, что соответствует отсутствию левой стойки. Ригель 5-6-7 работает как консоль, защемленная в узле 7.

Выводы:

1. При пропорциональном изменении жесткостей всех элементов системы (J_1/J_2 постоянно) распределение усилий по сечениям конструкции практически не меняется.

2. Изменение жесткости отдельного элемента ведет к перераспределению усилий.

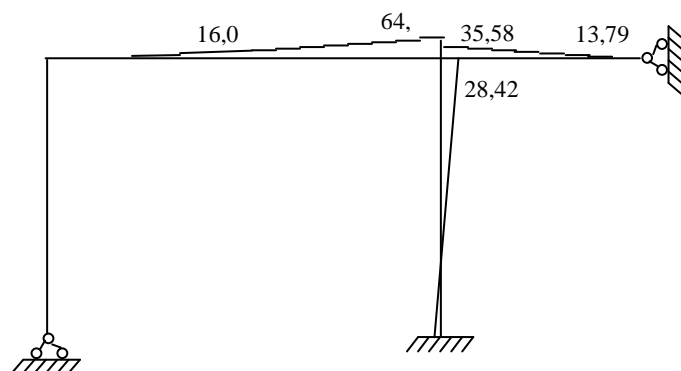


Рис.3.6 Эпюра изгибающих моментов в плоской раме при $J_1=0$

Пример 2. Выполнить расчет и провести анализ результатов расчета плоской фермы (рис.3.7) на действие системы сосредоточенных сил $P_1=1\text{т}$ и $P_2=2\text{т}$.

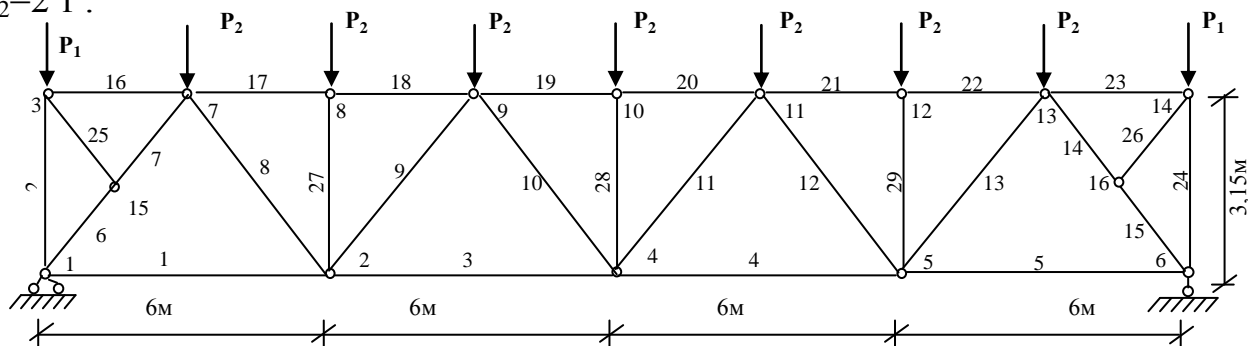


Рис.3.7. Расчетная схема фермы

Решение Расчет выполнен с использованием прямолинейных стержневых конечных элементов по SCAD.

Файл исходных данных представлен в табл. 3.3. На рис. 3.8, *а* изображена деформированная схема фермы, на которой указаны перемещения узлов верхнего пояса. На рис.3.8, *б* представлена эпюра продольных усилий.

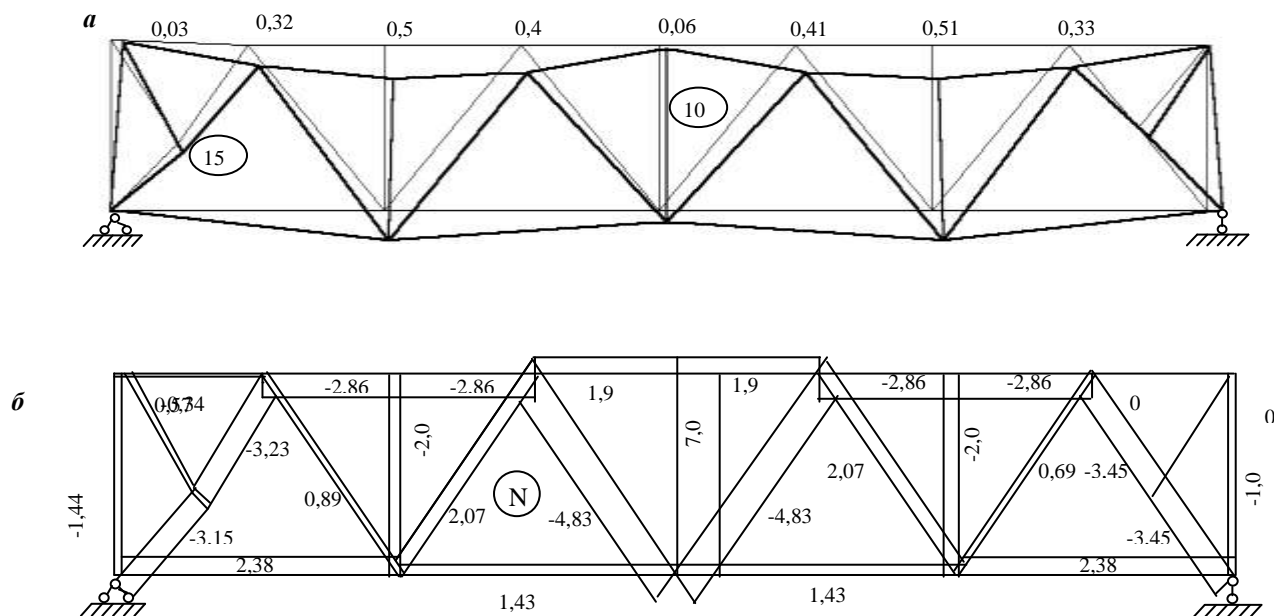


Рис. 3.8. Результаты расчета плоской фермы (вариант с ошибками в исходной информации) :

а – деформированная схема; *б* – эпюра продольных сил;

Анализируя полученные результаты (рис. 3.8, *а,б*), видим: во-первых, прогибы узлов 10 и 4 практически равны нулю, хотя по физическому смыслу при заданной нагрузке, приложенной к узлам верхнего и нижнего поясов и направленной сверху вниз, они должны быть большими по отношению к прогибам всех других узлов; во-вторых, отсутствует симметрия по величине усилий в стержнях фермы; в-третьих, в стержне 28 (узлы 4-10) усилие $S_{28} = 7$ т, что не соответствует фактическому значению $S_{28} = -2$ т (это легко определяется из условия равновесия узла 10), в стержне 25 (узлы 3-15) в отличие от стержня 26 (узлы 14-16) усилие не равно нулю; в стержнях 6 (1-15) и 7 (7-15) усилия не равны между собой.

Если предположить, что при решении задачи сбоев в ПЭВМ не было, то ошибки следует искать в исходной информации. При просмотре ис-

ходных данных обнаруживаем, что в узле 10 приложена другая как по величине, так и по направлению нагрузка (-7т).

Из условий равновесия узла 15 должно быть $S_{25}=0$ и $S_6=S_7$. Однако это не подтверждено результатами счета на ПЭВМ. Причину следует искать либо в загрузке узла 15 (нагрузка должна отсутствовать), либо в координатах узла 15. В данном случае искажена координата Z_{15} .

После устранения допущенных ошибок в исходной информации получен правильный результат расчета, доказательством этого служат деформированная схема и статические проверки (рис. 3.9).

Таблица 3.3

Файл исходных данных

Элементы			
Номер элемента	Тип элемента	Тип жесткости	Узлы
1	1	2	1 2
2	1	2	1 3
3	1	2	2 4
4	1	2	4 5
5	1	2	5 6
6	1	2	1 15
7	1	2	15 7
8	1	2	7 2
9	1	2	2 9
10	1	2	4 9
11	1	2	4 11
12	1	2	5 11
13	1	2	5 13
14	1	2	13 16
15	1	2	6 16
16	1	2	3 7
17	1	2	7 8
18	1	2	8 9
19	1	2	9 10
20	1	2	10 11
21	1	2	11 12
22	1	2	12 13
23	1	2	13 14
24	1	2	6 14
25	1	2	3 15
26	1	2	14 16
27	1	2	2 8
28	1	2	4 10
29	1	2	5 12

Номер узла	Координаты		Связи		
	X	Z	X	Z	
1	0.	0.	#	#	
2	6.	0.			
3	0.	3.15			
4	12.	0.			
5	18.	0.			
6	24.	0.		#	
7	3.	3.15			
8	6.	3.15			
9	9.	3.15			
10	12.	3.15			
11	15.	3.15			
12	18.	3.15			
13	21.	3.15			
14	24.	3.15			
15	1.5	1.3			
16	22.5	1.575			
Типы нагрузок					
№ Стр.	Номер узла или элемента	Вид нагрузки	Направление нагрузки	Номер нагрузки	№ загр.
1	7	0	3	1	1
2	8	0	3	1	1
3	9	0	3	1	1
4	10	0	3	3	1
5	11	0	3	1	1
6	12	0	3	1	1
7	13	0	3	1	1
8	3	0	3	2	1
9	14	0	3	2	1
Номер нагрузки		Величины нагрузок			
1		2.			
2		1.			
3		-7			
Жесткости					
Тип жесткости		Характеристики			
2		Вычисленные жесткостные характеристики: EF=163199.996 EY=543.999946 EIZ=543.9999 GKR=365.5679 GFY=54399.9973 GFZ=54399.9973 Прямоугольник: b=19.99999 h=19.99999			

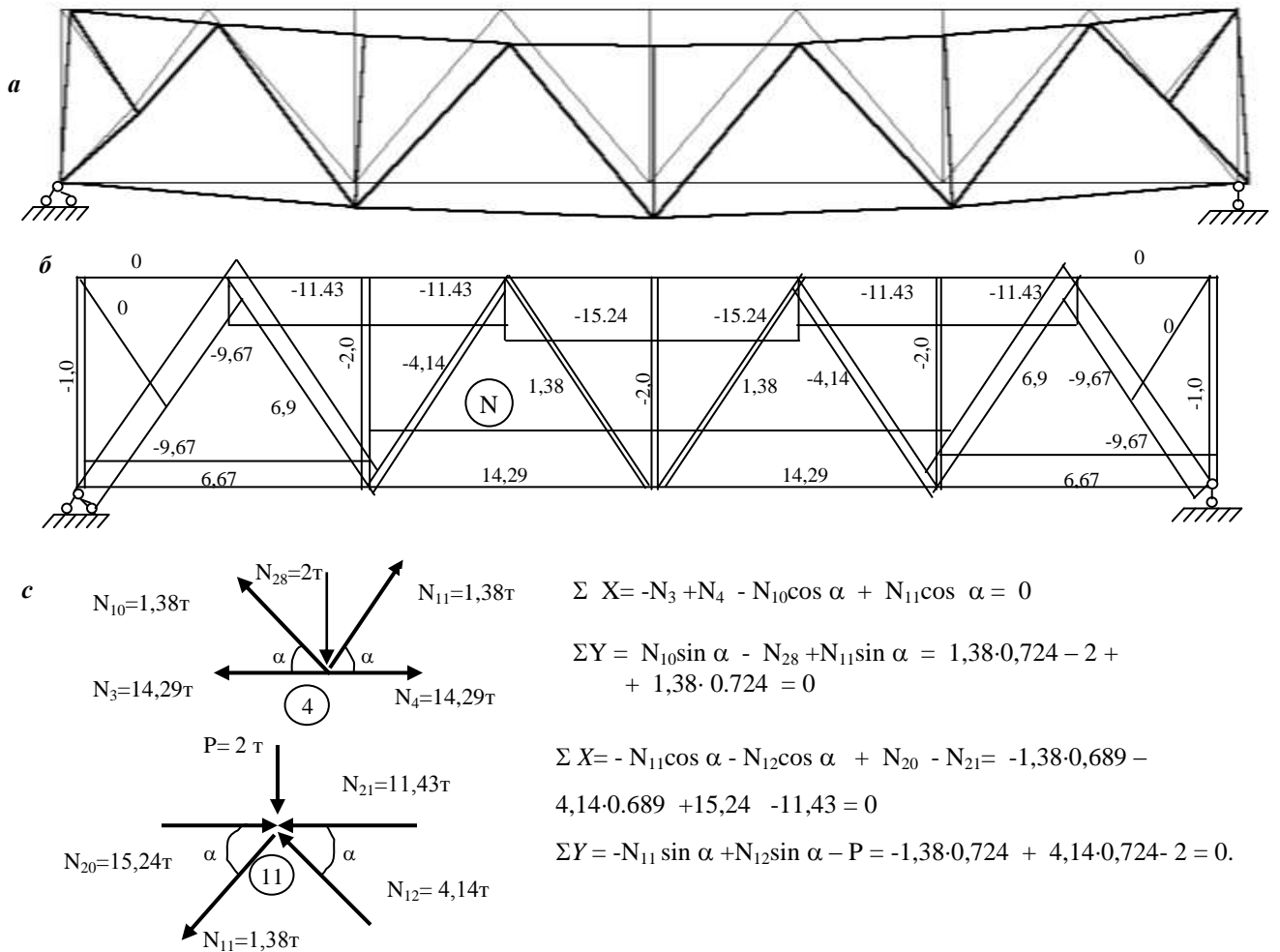


Рис.3.9. Результаты расчета после корректировки исходной информации: *а*- деформированная схема; *б* - эпюра продольных сил; *с* - статическая проверка

Пример 3. Плоская задача. Рассчитать прямоугольную пластину (рис. 3.10) с размерами $a=4$ м, $b=4$ м, $h=1$ м, нагруженную распределенной нагрузкой $q=100$ кН/м и силами: $P=100$ кН, $T=100$ кН. Касательная нагрузка T приложена в отмеченных точках между узлами. Материал - бетон: $E=4 \cdot 10^7$ кН/м², $\mu=0,2$.

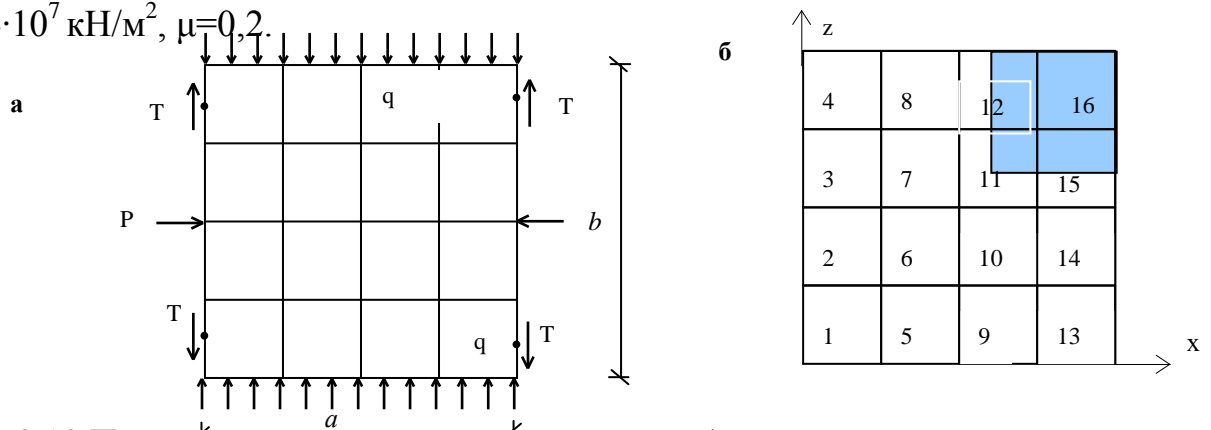


Рис. 3.10.Плоская задача: *а* - расчетная схема; *б* - нумерация конечных элементов

Решение. Исходя из учебных целей, принята редкая сетка разбиения на прямоугольные конечные элементы. Отметим особенность выбора рас-

четной схемы для пластинки с самоуравновешенной нагрузкой. Программа SCAD не обеспечивает решение конструкций без закреплений, поэтому вводим связи (рис. 3.11), которые не нарушают симметрии задачи и картины распределения напряжений.

Рис. 3.11. Расчетная схема пластины после уточнения

В результате счета определены перемещения узлов, а также нормальные и касательные напряжения в центрах тяжести конечных элементов (табл. 3.4). Для напряжений используются обозначения принятые в ПК SCAD: N_x , N_z , T_{xz} - нормальные и касательные напряжения. Деформированная схема показана на рис. 3.12, а, изополя нормальных и касательных напряжений - на рис.3.12, б, в, г.

В качестве примера проверки решения рассмотрено равновесие фрагмента пластины (фрагмент увеличен). При проверке нормальные и касательные напряжения в пределах отсеченной части заменяются соответствующими равнодействующими. Здесь рассмотрено равновесие правой верхней части пластины (на рис. 3.10, б заретушировано), сечение проведено через центральные точки 11, 12, 15 элементов. Все силы, действующие на эту отсеченную часть, показаны на рис. 3.13.

Таблица 3.4

Напряжения в центрах тяжести конечных элементов

Номер элемента	Номер сечения.	Номер загрузки	Напряжения (кН/м ²)		
			NX	NZ	TXZ
1	1	1	-15.371	-50.034	26.852
2	1	1	-34.628	-19.138	41.524
3	1	1	-34.628	-19.138	-41.524
4	1	1	-15.371	-50.034	-26.852
5	1	1	-41.053	-99.965	1.442
6	1	1	-8.946	-80.861	7.660
7	1	1	-8.946	-80.861	-7.660
8	1	1	-41.053	-99.965	-1.442
9	1	1	-41.053	-99.965	-1.442
10	1	1	-8.946	-80.861	-7.660
11	1	1	-8.946	-80.861	7.660
12	1	1	-41.053	-99.965	1.442
13	1	1	-15.371	-50.034	-26.852
14	1	1	-34.628	-19.138	-41.524
15	1	1	-34.628	-19.138	41.524
16	1	1	-15.371	-50.034	26.852

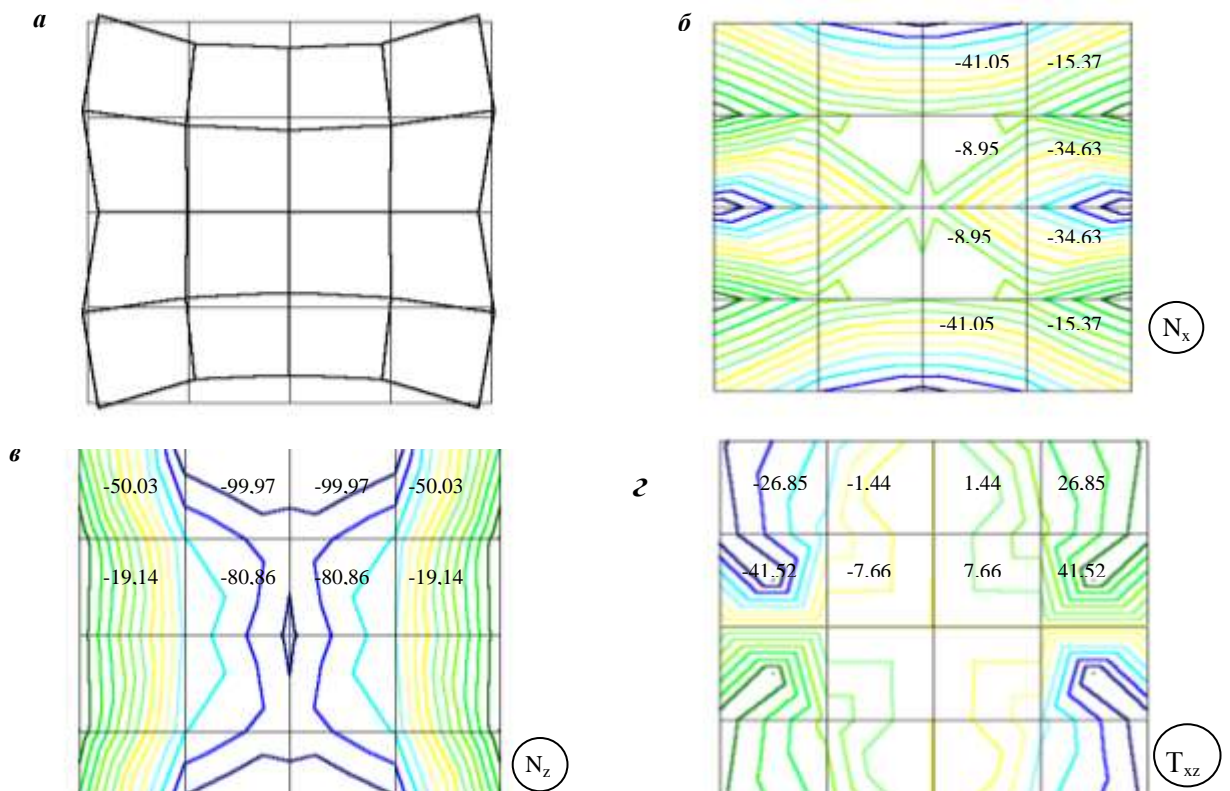
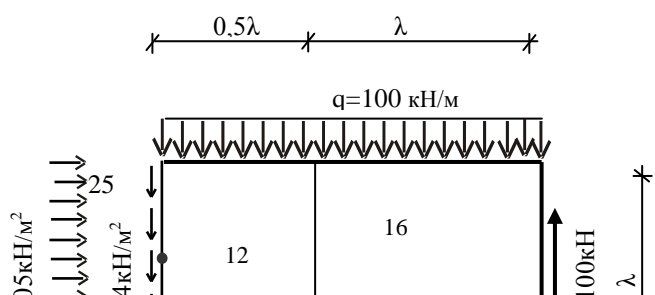


Рис.3.12.Результаты решения плоской задачи:

a – деформированная схема; *б, в, г* – изолинии нормальных и касательных напряжений (кН/м²)



$$\sum X = (41.05 + 8.94 \cdot 0.5 - 7.66 \cdot 0.5 - 41.52) \cdot \lambda \cdot h = 45,52 - 43,35 = 0,17 ;$$

$$\varepsilon = (0,17 \cdot 100\%) / 43,35 = 3,8\% ;$$

$$\sum Z = (80,86 - 0,5 + 19,14 - 1,44 - 7,66 - 0,5) \cdot \lambda \cdot h + 100 - 100 \cdot 1,5 - 1, = 159,57 - 155,27 = 4,3 ;$$

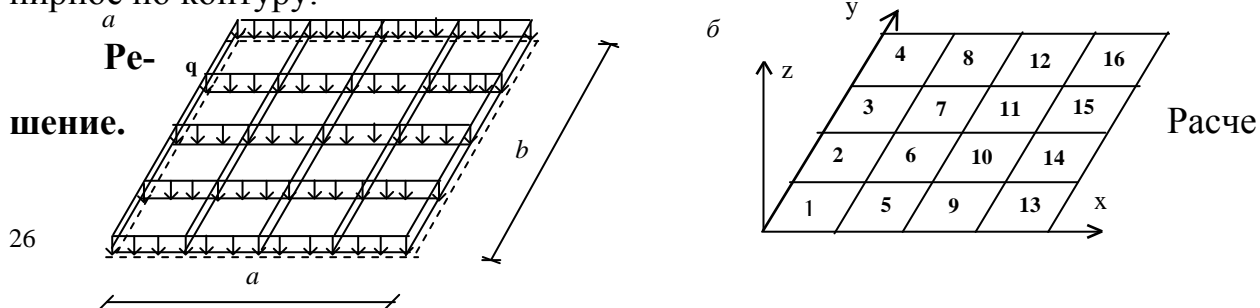
Рис.3.13. Статическая проверка

Анализ полученных результатов

- деформированная схема соответствует заданной нагрузке;
- статическая проверка равновесия практически выполняется (максимальная погрешность не превышает 4%)
- картина напряжений и деформированное состояние соответствуют заданной нагрузке и друг другу, в частности, в пластине преобладает сжатие в направлении оси Z, величина нормальных напряжений больше чем в направлении X;
- симметричной нагрузке соответствует симметричное распределение напряжений.

Вывод. Получены правильные результаты, которые могут быть приняты как первое приближение решения при заданной сетке, следующий шаг – сгущение сетки путем разбиения пластины на большее количество конечных элементов.

Пример 4. Поперечный изгиб пластин. Построить эпюры прогибов и усилий для прямоугольной пластины (рис. 3.14), загруженной равномерно распределенной нагрузкой $q=20 \text{ кН/м}^2$, при следующих данных: $a=4 \text{ м}$, $b=4 \text{ м}$; толщина пластинки $h=0,08 \text{ м}$; $E=0,21 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu =0,15$; опирание шарнирное по контуру.



чет выполним по программе SCAD, с использованием прямоугольных конечных элементов на редкой сетке (4x4), рис 3.14, б.

Рис 3.14. Квадратная пластина:

а— расчетная схема; б — нумерация конечных элементов

В результате счета определены перемещения узлов, а также погонные усилия в центрах тяжести конечных элементов (табл. 3.5). На рис. 3.15, а показана деформированная схема пластины, на рис. 3.15, б, в, г, д, е – изолинии изгибающих моментов M_x , M_y , крутящего момента M_{xy} , поперечных сил Q_x , Q_y . Положительные направления усилий см. на рис. 3.16.

Таблица 3.5

Усилия в центрах тяжести конечных элементов

Номер элемента	Номер сечения	Номер загрузки	Усилия и напряжения				
			кН·м/м			кН/м	
			M_x	M_y	M_{xy}	Q_x	Q_y
1	1	1	3.175	3.175	-10.711	6.116	6.116
2	1	1	6.270	5.089	-3.848	17.032	2.087
3	1	1	6.270	5.089	3.848	17.032	-2.087
4	1	1	3.175	3.175	10.711	6.116	-6.116
5	1	1	5.089	6.270	-3.848	2.087	17.032
6	1	1	11.747	11.747	-1.554	4.578	4.578
7	1	1	11.747	11.747	1.554	4.578	-4.578
8	1	1	5.089	6.270	3.848	2.087	-17.032
9	1	1	5.089	6.270	3.848	-2.087	17.032
10	1	1	11.747	11.747	1.554	-4.578	4.578
11	1	1	11.747	11.747	-1.554	-4.578	-4.578
12	1	1	5.089	6.270	-3.848	-2.087	-17.032
13	1	1	3.175	3.175	10.711	-6.116	6.116
14	1	1	6.270	5.089	3.848	-17.032	2.087
15	1	1	6.270	5.089	-3.848	-17.032	-2.087

Статическая проверка. Рассмотрим равновесие средней части пластины: сечение проведем через центры 2, 3, 7, 11, 15, 6, 10, 14 элементов (рис.3.17, а). Как видно из условия $\Sigma Z = 0$, равновесие выполняется с точностью 5,7%. Если рассмотреть равновесие фрагмента пластины, примыкающего к контуру, например, 3, 4, 8, 12, 16, 15, 11, 7 (рис. 3.17, б), погрешность увеличивается вдвое.

При сгущении сетки (8x8) погрешность статических проверок (ПСП) снижается в 3 – 4 раза и принимает значения менее 4% (табл. 3.6).

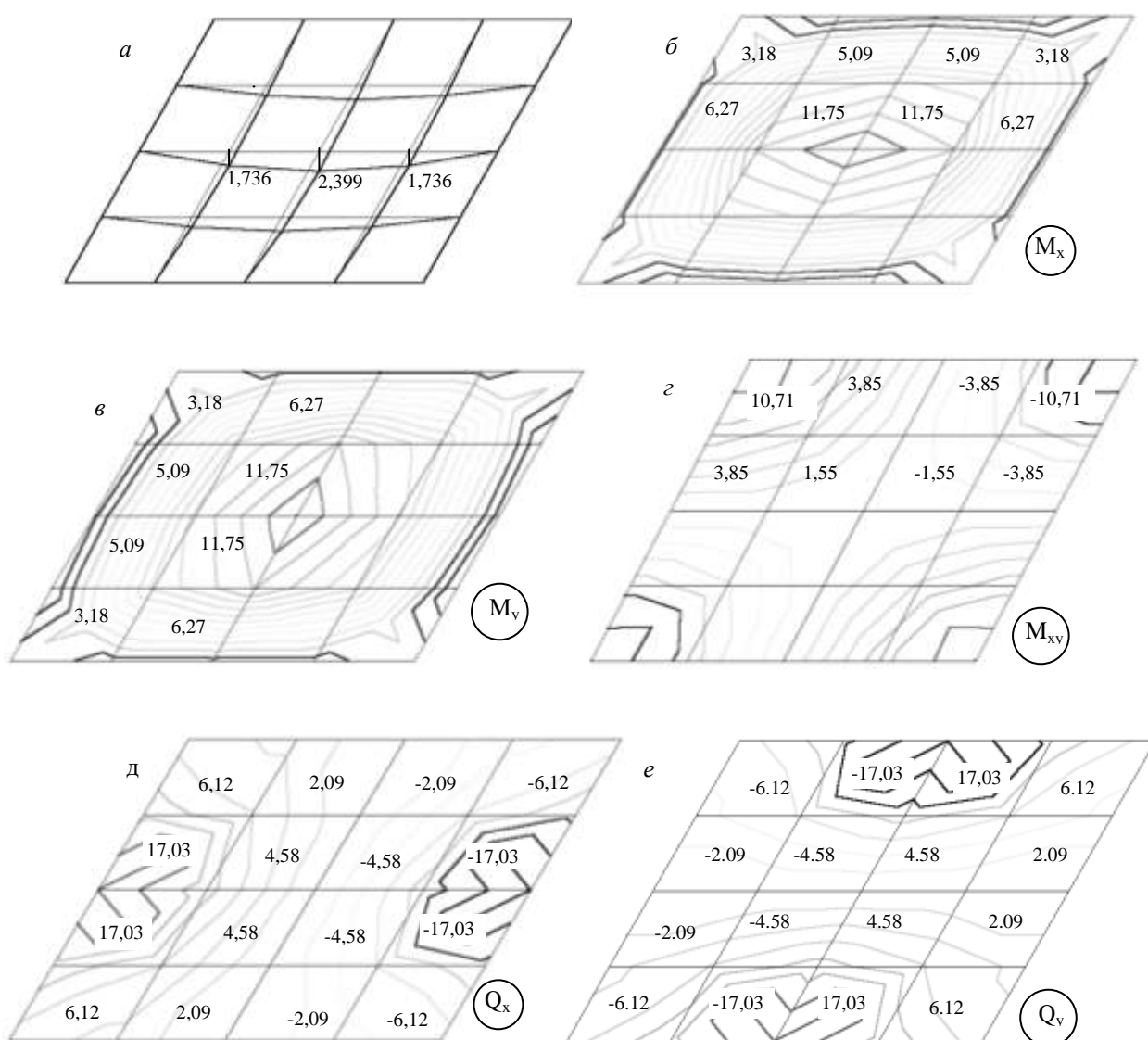


Рис. 3.15. Результаты расчета пластины:
 а – деформированная схема; б, в, г - изолинии изгибающих и крутящего моментов (кН·м/м); д, е – изолинии перерезывающих сил (кН/м)

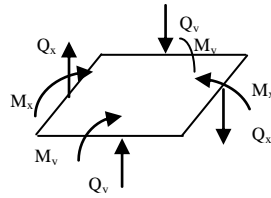


Рис.3.16. Усилия , действующие на конечный элемент

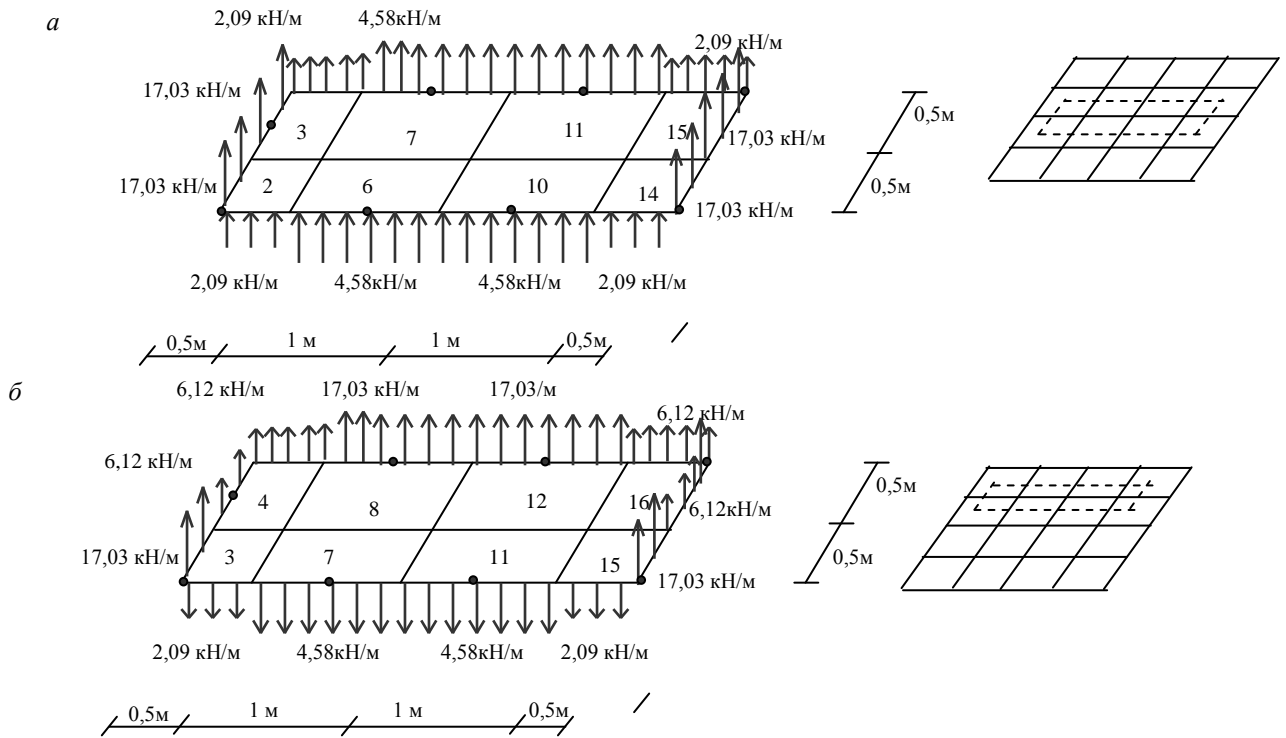


Рис. 3.17. Статическая проверка (сетка 4x4):

a – средняя часть пластины $\Sigma Z = 17,03 \cdot 0,5 \cdot 4 + 2,09 \cdot 0,5 \cdot 4 + 4,58 \cdot 1 \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 1 = 3,44$, $\varepsilon = (3,44 \cdot 100\%) / 60 = 5,7\%$; *б* – верхняя часть пластины $\Sigma Z = 17,03 \cdot 0,5 \cdot 2 + 17,03 \cdot 1 \cdot 2 - 2,09 \cdot 0,5 \cdot 2 - 4,58 \cdot 1 \cdot 2 + 6,12 \cdot 0,5 \cdot 4 - 20 \cdot 3 \cdot 1 = 7,92$; $\varepsilon = (7,92 \cdot 100\%) / 60 = 13,2\%$

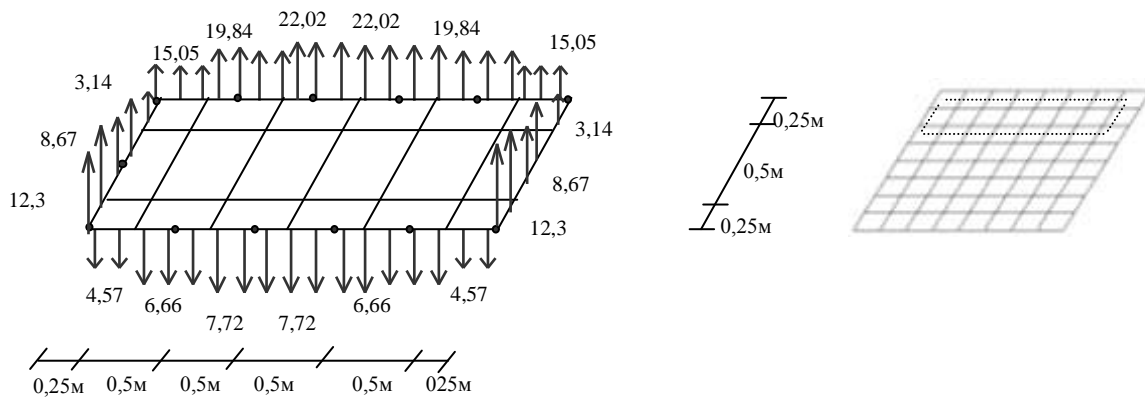
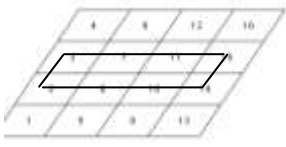
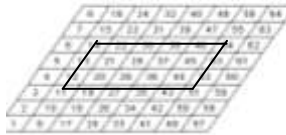
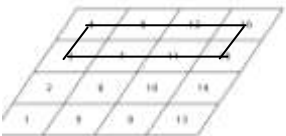
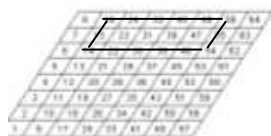
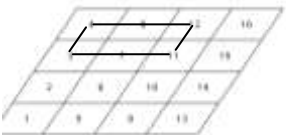
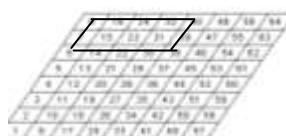


Рис. 3.18. Статическая проверка верхней части пластины (сетка 8x8):

$\Sigma Z = 15,05 \cdot 0,25 \cdot 2 + 19,84 \cdot 0,5 \cdot 2 + 22,02 \cdot 0,5 \cdot 2 + 3,14 \cdot 0,25 \cdot 2 + 8,67 \cdot 0,5 \cdot 2 + 12,3 \cdot 0,25 \cdot 2 - 4,57 \cdot 0,25 \cdot 2 - 6,66 \cdot 0,5 \cdot 2 - 7,72 \cdot 0,5 \cdot 2 - 20 \cdot 1 \cdot 2,5 = 0,89$; $\varepsilon = (0,89 \cdot 100\%) / 50 = 1,8\%$

Погрешности статических проверок

Сетка 4x4	ПСП	Сетка 8x8	ПСП
	5.7%		1.7%
	13.2%		1.8%
	11%		3.6%

Анализ полученных результатов:

- деформированная схема соответствует заданной нагрузке и условиям опирания, прогиб в центре плиты при сетке элементов 4x4 (2,399 см) мало отличается от точного его значения (2,2698 см, решение Навье), расхождение 5,7%;

- картина распределения усилий также соответствует нагрузке и условиям закрепления; величина изгибающего момента в центре плиты (14,63 кНм/м) отличается от точного значения (13,555 кНм/м) на 7,9%;

- условия равновесия частей плиты выполняются приближенно, ближе к контуру погрешность больше;

- расчет, выполненный на более густой сетке (8x8) дает более точные (в 3 – 4 раза) результаты: статические проверки выполняются точнее, величины прогибов и изгибающих моментов в центре плиты значительно ближе к точным значениям (расхождение 1,45% для прогибов и 1,96% для моментов);

- при дальнейших сгущениях сетки вдвое погрешности центральных прогиба и момента уменьшаются каждый раз примерно в 4 раза (табл. 3.7), что показывает высокую скорость сходимости (порядка h^2) приближенных решений к точному.

Заметим, что наблюдаемые погрешности в условиях равновесия отсеченных частей конструкции, на первый взгляд, противоречат используемому в МКЭ методу перемещений, для определения которых программа составляет и решает уравнения равновесия узлов. Однако эти уравнения,

Погрешность и скорость сходимости численных решений

OST				
n*n	$\Delta u, \%$	$\Delta u/\Delta u$	$\Delta \sigma, \%$	$\Delta \sigma/\Delta \sigma$
2*2	3.842		15.16	
4*4	0.851	4,51	4.56	3,32
8*8	0.167	5,09	1.21	3,77
16*16	0.039	4,27	0.31	3,94
COSMOS				
n*n	$\Delta u, \%$	$\Delta u/\Delta u$	$\Delta \sigma, \%$	$\Delta \sigma/\Delta \sigma$
2*2	20.08		14.48	
4*4	5.65	3,55	5.79	2,50
8*8	1.46	3,85	1.53	3,77
16*16	0.37	3,97	0.39	3,93

полученные на основе метода Галеркина, с локальными координатными функциями, могут не соответствовать равновесию одной какой-либо отсеченной части конструкции, а представлять собой комбинацию условий равновесия бесконечного набора частей. Отсюда приближенность в результатах статических проверок.

В расчетах, основанных на вариационно-разностном методе (ВРМ) в форме метода конечных разностей (МКР), удается установить соответствие между разрешающими уравнениями и условиями равновесия конкретных отсеченных частей конструкции. При статических проверках равновесие таких отсеченных частей выполняется точно, это повышает уверенность пользователя в правильности расчета. Правда, у недостаточно подготовленного пользователя может появиться опасная иллюзия, что расчеты выполнены точно и не нужны оценки погрешности.

Таблица 3.8

Оценка погрешности при различной густоте сетки

Оцениваемые величины	ве-	Относительные погрешности при различной густоте сетки, %			
		4x4	8x8	16x16	32x32
W_{\max}		5,7	1,45	0,37	0,093
M_{\max}		7,9	1,96	0,48	0,13

Как отмечено в главе 5, схемы ВРМ в форме МКР, за счет использования точек сверхсходимости производных, дают более высокую точность (при одинаковых затратах на решение системы разностных уравнений), чем опубликованные в литературе и полученные авторами решения по МКЭ.

В частности, для рассмотренной шарнирно закрепленной плиты с равномерной нагрузкой из четырех конечноэлементных программ (SCAD, COSMOS, ANSYS, NASTRAN) лучшую точность показала COSMOS, сравнение с ней представлено в табл. 3.9, где n – густота сетки, Δu , $\Delta \sigma$ – погрешность соответственно перемещений, напряжений, Δ/Δ – отношение предыдущей погрешности к следующей, показывающее скорость сходимости перемещений и напряжений порядка h^2 для обеих программ.

При одинаковой густоте сетки погрешности перемещений по ВРМ (программа OST [4.4]) почти в 10 раз меньше, чем по МКЭ (COSMOS). Погрешности напряжений почти одинаковы, что объясняется применением в программе COSMOS гибридных конечных элементов с уточненной аппроксимацией напряжений.

Заметим, что при одинаковых n в программе OST вдвое меньше неизвестных – расчет менее трудоемкий. Сравнения с решениями характерных задач по МКЭ и МКР, опубликованными в литературе [4.5-4.9], подтверждают повышенную точность сверхсходящейся ВРС-2 при одинаковом времени счета, что равносильно большей скорости расчетов при одинаковой точности.

Последнее особенно важно в нелинейных и динамических расчетах, в задачах устойчивости и колебаний, а также при применении расчетных программ в оптимальном проектировании и в управлении конструкциями.

3.2.2 Примеры расчета строительных конструкций на динамические воздействия

Пример 5 Построить эпюру динамических изгибающих моментов в симметричной раме, показанной на рис. 3.36, при действии на нее симметричной динамической нагрузки $P(t)=P_0\sin\theta t$ и $q(t)=q_0\sin\theta t$, где $P_0=6\text{т}$, $q_0=3\text{ т/м}$. Частота возмущающих сил $\theta=0,6 \omega_1$. Массы сосредоточены посередине каждого стержня и равны $m=Q/g$. Вес массы $Q=0.0954\text{ т}$. Пример заимствован из [3.1]

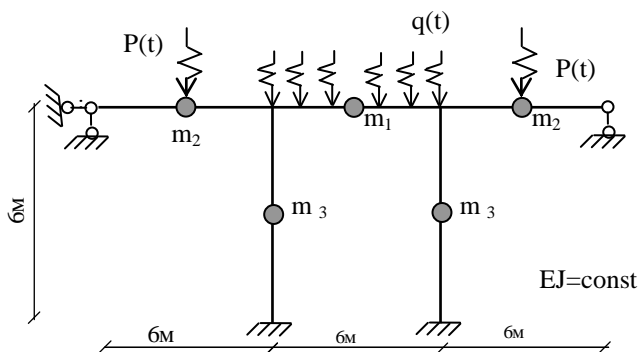


Рис.3.19. Расчетная схема

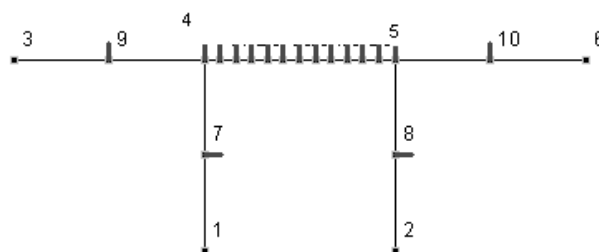


Рис.3.20.Конечно элементная модель

Решение. Расчет выполним с применением программного комплекса SCAD (ПК SCAD). Выбор конечно элементной модели. Так как в комплексе не предусмотрена распределенная динамическая нагрузка, заменим ее сосредоточенными силами. Для этого введем дополнительные узлы с шагом 0,5м, при этом величина сил, заменяющих распределенную нагрузку, равна $(q_0 \cdot 0,5) \sin \theta t = 1,5 \sin \theta t$. Массу среднего ригеля также распределим по дополнительным узлам. Внесем некоторую ясность по вопросу о распределении масс. В исходной схеме масса всего стержня распределен на 3 точки: половина ее - посередине стержня ($Q/g = 0,0954/g$), вторая половина – по концам стержня, которая в расчете не учитывается, т.к. вызывает только продольные деформации в стойках. В принятой нами схеме массу всего ригеля делим на 12 частей. Такое распределение точнее отражает действительное состояние ригеля.

Конечно-элементная модель представлена на рис. 3.37. Жесткость всех стержней принята $EJ=1000 \text{ т м}^2$, $EF=10^8 \text{ т}$.

В результате расчета на свободные колебания получена наименьшая частота собственных колебаний $\omega_1=170 \text{ сек}^{-1}$, что составляет $0,53\sqrt{EJ/m}$.

Исходные данные для расчета на вынужденные колебания: частота возмущающей нагрузки $\theta=0,6 \cdot 170=102 \text{ сек}^{-1}$; количество учитываемых форм собственных колебаний принято равным 5 (по количеству динамических степеней ст

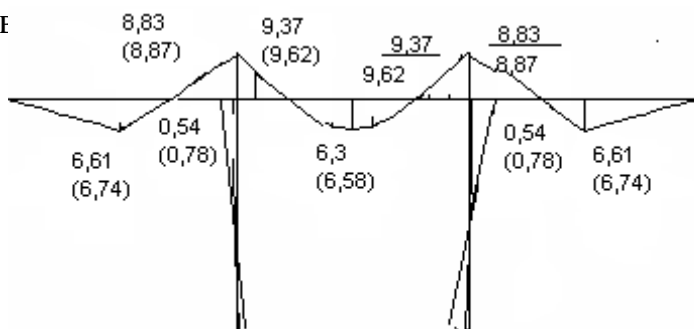


Рис.3.21. Эпюра динамических изгибающих моментов.
- в скобках значения, полученные в [3.1]

Сопоставление результатов.

1. Результаты, полученные в [1] и по ПК SCAD, практически совпали. Максимальное расхождение по величине изгибающих моментов на ригелях не превышает 6%.

Исключение составляют усилия на стойках, там погрешность составляет 30%. Очевидно, сосредотачивать в одном узле собственный вес стоек не совсем правильно.

2. Частота свободных колебаний, полученная в [1] и по программному комплексу, одинакова.

Овладение компьютерной программой содержит определенные «подводные камни», ведущие к ошибкам. Укажем на некоторые из них.

Ошибка 1. С целью упрощения задачи была сделана попытка включить 4 формы собственных колебаний вместо 5. Это привело к искаженным результатам (рис.3.40). Ошибка заключается в том, что в ПК при решении задач динамики используется сочетание метода конечных элементов (МКЭ) с разложением по формам собственных колебаний, поэтому при формировании динамического нагружения следует включать все основные формы собственных колебаний, что сделано выше.

Ошибка 2. Если массу m_1 оставить сосредоточенной, как в исходной задаче, а нагрузку $q(t)$ распределить по дополнительным (невесомым) узлам, программа выдает решение, но оно не соответствует истинному распределению усилий

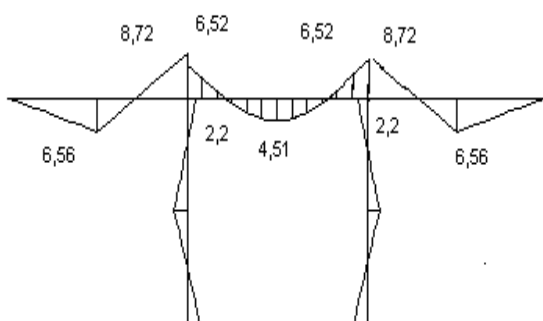


Рис.3.22. Эпюра динамических изгибающих моментов при ошибке 1

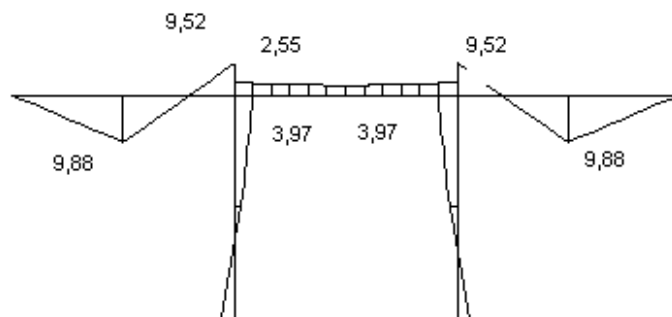


Рис.3.23. Эпюра динамических изгибающих моментов при ошибке 2

Пример 6 Определить свободные колебания пространственной фермы, состоящей из ребристой железобетонной плиты (3 x 18 м) подкрепленной металлическим шпренгелем (рис. 4.28). ОпираНИЕ шарнирное по торцам. Материал плиты бетон тяжелый класса В 60. Толщина плиты 3см, се-

чение ребер 10 x 17см. Шпренгель: стержни нижнего пояса из уголков 180 x 12, раскосы из уголков 140 x 10 .

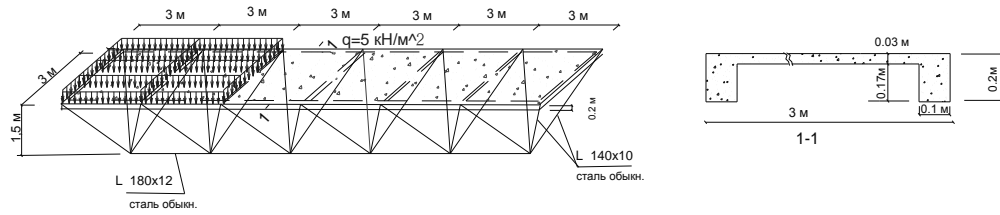
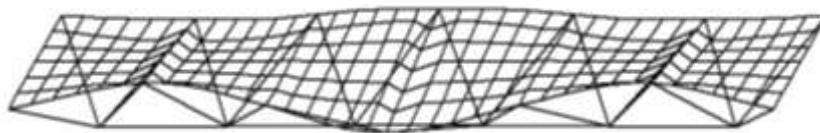


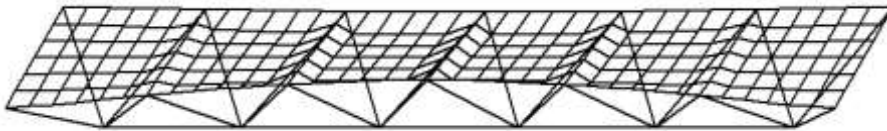
Рис.3.24. Расчетная схема

Решение.

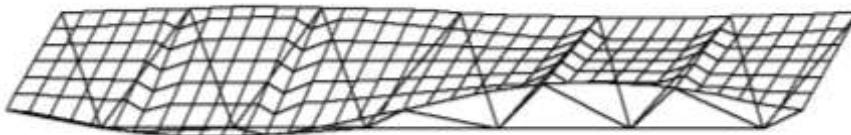
Расчет выполнен с применением ПК SCAD. Плита аппроксимирована 216 прямоугольными конечными элементами размером 0,5 x 0,5 м ; ребра - стержнями с прямоугольным поперечным сечением , прикрепленными к плите с помощью жестких вставок .



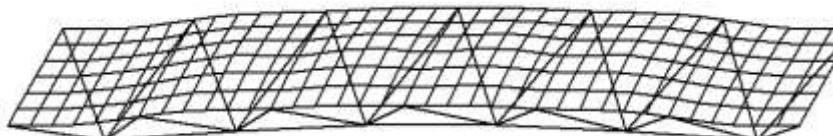
1-я форма колебаний $\omega=14.65414 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=2.333462 \text{ гц}$ $T=0.4285477 \text{ сек}$



2-я форма колебаний $\omega=32.70876 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=5.208401 \text{ гц}$ $T=0.1919974 \text{ сек}$



3-я форма колебаний $\omega=44.13987 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=7.028641 \text{ гц}$ $T=0.142275 \text{ сек}$

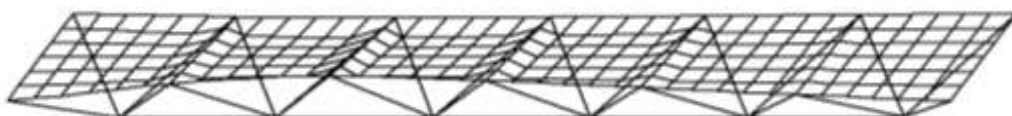


4-я форма колебаний $\omega=53.35651 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=8.496259 \text{ гц}$ $T=0.1176988 \text{ сек}$

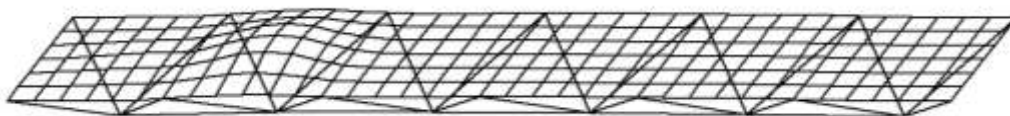
Рис.3.25. Формы собственных колебаний с учетом только собственного веса

Вариант В Свободные колебания пространственной фермы с учетом собственного веса и внешней нагрузки .

1-я форма колебаний $\omega=13.54419 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=2.156719 \text{ гц}$ $T= 0.4636672$



2-я форма колебаний $\omega=22.83654 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=3.636392 \text{ гц}$ $T=0.2749978 \text{ сек}$



3-я форма колебаний $\omega=27.04392 \text{ сек}^{-1}$ $\lambda=4.306358 \text{ гц}$ $T=0.2322147 \text{ сек}$

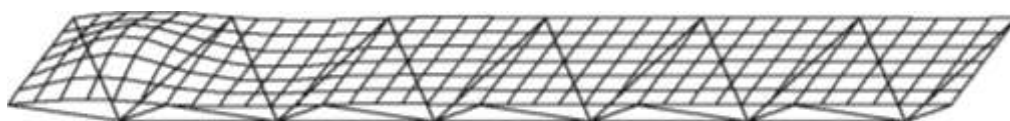


Рис.3.26. Формы колебаний с учетом собственного веса и односторонней нагрузки на плиту

Таблица 3.9

ТИП	ВЕЛИЧИНЫ НАГРУЗОК			
НАГ-				
РУЗКИ	1	2	3	4
1	5.			
2	.735749959			
3	.210464239			
4	.416924983			
5	.324898839			

Таблица 3.10

Загру:		N	: СОБСТВ.	: Ч А С Т О Т Ы	: ПЕРИОДЫ		
			: П/П	: -----	: -----		
жение:			: ЗНАЧЕНИЯ	: ω 1/Сек	: ГЦ	: Сек	
			ω -круговая частота	: λ -частота	: T-период колебаний		

	2	1	.06824	14.65414	2.333462	.4285477	
		2	.0305728	32.70876	5.208401	.1919974	
		3	.0226552	44.13987	7.028641	.142275	
		4	.0187418	53.35651	8.496259	.1176988	
	3	1	.0738323	13.54419	2.156719	.4636672	
		2	.0437894	22.83654	3.636392	.2749978	
		3	.0369768	27.04392	4.306358	.2322147	
		4	.023884	41.86891	6.667024	.1499919	

Анализ полученных результатов

1. Отдельно стоящая ферма является достаточно гибкой, круговая частота основного тона (наименьшая) от собственного веса $\omega = 14,65 \text{ сек}^{-1}$. В первой форме колебаний преобладают крутильные деформации.

2. Учет односторонней нагрузки приводит к незначительному снижению частоты собственных колебаний. Следует отметить, что колебания фермы в составе покрытия, т.е. с учетом влияния соседних ферм, существенно изменяет формы колебаний и повышает собственную частоту.

3. Целесообразность увеличения жесткости фермы для повышения частоты собственных колебаний должна решаться по результатам расчета не отдельно стоящей фермы, а целого покрытия с взаимным влиянием соседних ферм..

3.2.4. Примеры расчета строительных конструкций на устойчивость

Пример 7 Требуется найти критическую нагрузку для рамы, показанной на рис.3.27. Пример заимствован из [3.1]

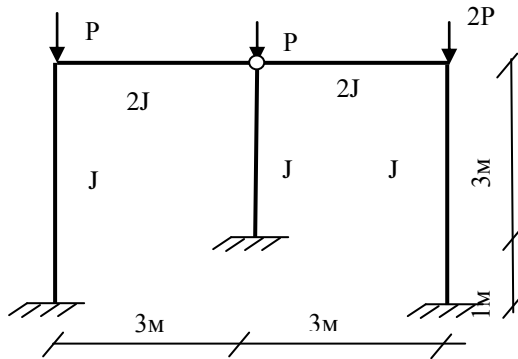


Рис.3.27. Расчетная схема

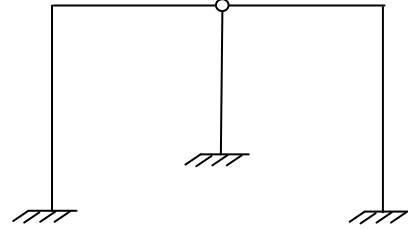


Рис.3.28. Форма потери устойчивости

Решение. Расчет выполним с применением ПК SCAD. Жесткость задана численно : $EJ=1 \text{ т м}^2$, $EF= 1000 \text{ т}$. Сила принята $P=1\text{т}$.

В результате расчета по ПК SCAD получен коэффициент запаса устойчивости, который представляет отношение наименьшей критической силы к действительной величине нагрузки $(P_{кр}/EJ)/P_{действит}=0,310058$. $P_{кр}=0,310058 EJ$

Расхождение результатов полученных по ПК SCAD и в [3.1] составляет 0,2%.

Пример 8. Требуется найти критическую нагрузку для двух пролетной рамы (рис.3.29). Пример заимствован из [3.2].

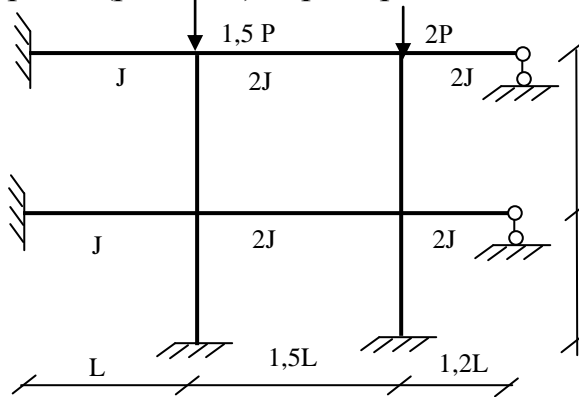


Рис.3.29. Расчетная схема

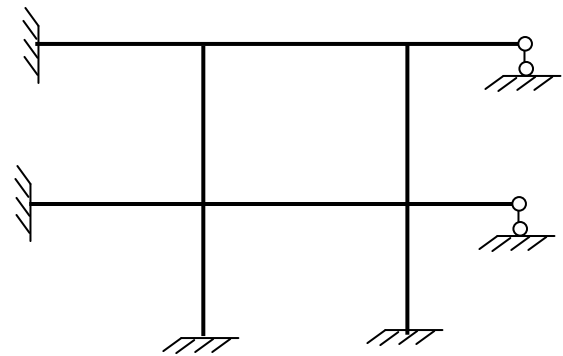


Рис.3.30. Форма потери устойчивости

Решение. Расчет выполним с применением ПК SCAD. Жесткость задана численно : $EJ=1 \text{ т м}^2$, $EF= 1000 \text{ т}$. Сила принята $P=1\text{т}$. Длина стержней принята $L=3\text{м}$. Жесткость стоек принята $EJ_{\text{стойк}}=1,5EJ$. Расхождение результатов полученных по ПК SCAD и в [3.2] составляет В результате расчета по ПК SCAD получена $P_{кр}=22,95 EJ$, расхождение с [3.2] 3,7%.

3.2.4. Расчет балок и плит на упругом основании

Балка на упругом основании

Напомним некоторые моменты из курса сопротивления материалов [3.1].

Рассмотрим прямую балку, лежащую на сплошной упругой среде. Следуя Ньютону, разобьем сплошное упругое основание на отдельные несвязанные элементы. Каждый элемент можно представить как отдельный упругий элемент или пружину (рис. 3.31).

Если к балке приложены внешние силы, со стороны пружин возникают реакции, каждая из которых пропорциональна местному прогибу. Так как расстояние между пружинами мало, целесообразно представить реакции в виде распределенных сил, интенсивностью q_R , пропорциональной прогибу y

$$q_R = -cy, \quad (3.1)$$

где c — коэффициент пропорциональности, зависящий от жесткости пружин и частоты их расстановки. Знак «минус» указывает на то, что реакции направлены в сторону, противоположную прогибу.

Балку, расположенную на сплошной деформируемой среде рассмотренного вида, называют *балкой на упругом основании*, а коэффициент c — *коэффициентом упругого основания* (размерность $[c] = [F]/[L^3]$).

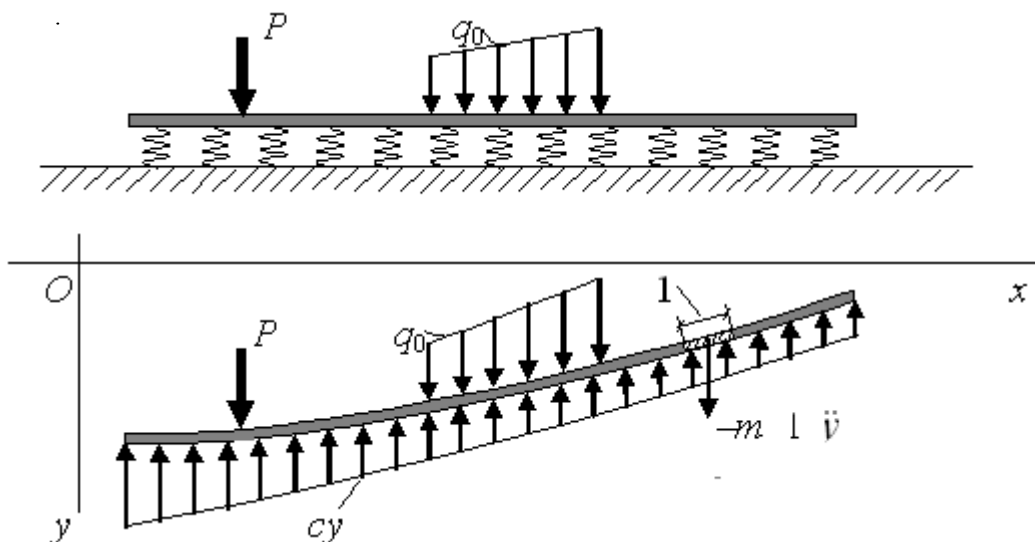


Рис. 3.31

В инженерной практике такая расчетная схема (модель Фусса — Винклера) получила широкое распространение и используется при анализе многих

конструкций. Соотношение (3.1) не всегда соблюдается, но часто может рассматриваться как приближенное.

Исследования действительной работы балок, лежащих на насыпном песке, уплотненном илистом грунте и на некоторых других грунтовых основаниях, подтвердили правильность вывода о приемлемости модели Винклера для практических расчетов. Для других грунтов используют другие модели упругого основания: для сплошного связанного основания — упругое полупространство (механические свойства модели описываются модулем деформации и коэффициентом Пуассона), модель с двумя коэффициентами постели П.Л. Пастернака и др. Подробнее об этом можно прочитать в [3.4].

Дифференциальное уравнение изгиба балки на упругом основании получается из дифференциального уравнения упругой линии балки

$$EJy^{IV} = q^*. \quad (3.2)$$

Вместо величины q^* надо подставить выражение $q_0 - cy - my''$. Под q_0 будем понимать внешнюю распределенную нагрузку, под cy — реакцию упругого основания (3.1). Последнее слагаемое $-my''$, где m — распределенная масса (масса единицы длины), отражает силу инерции при вертикальном смещении. Тогда для балки постоянной жесткости имеем уравнение

$$EJy^{IV} + m\ddot{y} + cy = q_0, \quad (3.3)$$

или, вводя обозначение $\frac{c}{EJ} = k$, получим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{IV} + \frac{m}{EJ} \ddot{y} + ky = \frac{q_0}{EJ}. \quad (3.4)$$

В общем случае попытка получить аналитическое решение уравнения (4) наталкивается на определенные трудности, которые могут быть обусловлены переменностью входящих в уравнение параметров, одновременностью учета упругого основания и сил инерции, произвольным расположением сосредоточенных сил и пр. Используя известный из математики метод решения уравнений такого типа, решение можно получить лишь для простейших случаев, поэтому приходится прибегать к приближенным методам, основанным на методах конечных разностей и конечных элементов.

Ниже приводятся примеры расчета балок на упругом основании, выполненные по программному комплексу ANSYS с использованием балочных конечных элементов BEAM3 и BEAM54. Препроцессор комплекса позволяет

быстро изменять параметры задачи (числовые константы, свойства материала и т.д.) с целью получения новых вариантов решений, что немало важно при решении исследовательских задач. Результаты решений могут выдаваться в виде графиков (деформаций, форм колебаний, эпюр), таблиц значений, пространственных чертежей.

Пример 9. Можно рассмотреть реальную задачу. Железобетонный ленточный фундамент подвержен по всему пролету равномерно распределенной нагрузке $q = 0,015$ МПа. Фундаментная балка имеет толщину 0.2 м, ширину 1 м и длину 6 м. Модуль упругости железобетона $E = 14 \cdot 10^3$ МПа.

Основание фундамента сложено из однородной толщи лёссового грунта. Коэффициент жесткости грунтов основания в естественном состоянии имеет значение $c_0 = 10$ МПа/м.

Тогда $q = q_0 \cdot b = 0,015 \cdot 1$ МПа \cdot м = 15 кН/м; $c = c_0 \cdot b = 10 \cdot 1$ МПа/м \cdot м = 10 МПа.

Зададимся целью исследовать работу данного фундамента: поведение реактивного давления, изгибающих моментов, частот и форм собственных колебаний.

Исследуем более общую задачу. Ленточный фундамент представим как балку, лежащую на упругом основании, нагруженную распределенной нагрузкой. Рассмотрим три случая нагружения, причем значение нагрузки конкретизировать не будем, а возьмем, равной q Н/м (рис. 3.32). Для $q = 0,015$ МПа решение легко получится после умножения полученных значений прогибов y , отпора $-c_u$ или изгибающего момента M на это число.

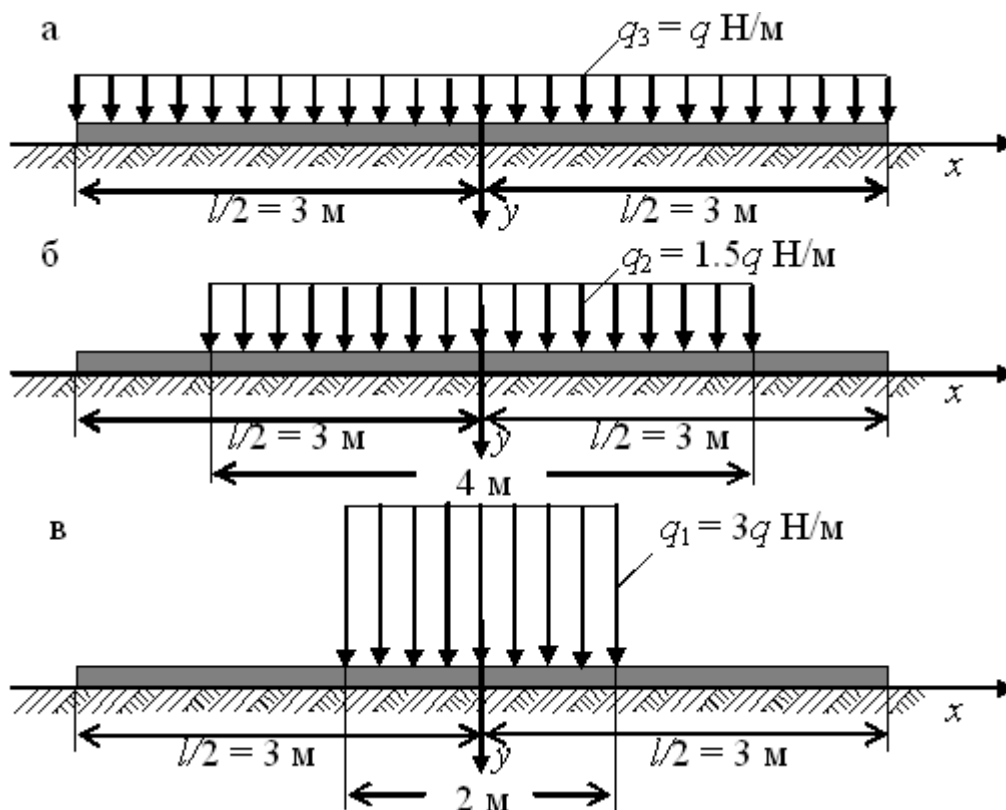


Рис. 3.32. Схемы загрузений балки длиной 6 м

Во всех случаях равнодействующая распределенной нагрузки одинаковая, равная $lq = 6q$ Н, поэтому интенсивности q_i ($i = 1, 2, 3$) разные.

При расчетах примем шаг сетки $dx = 1$ м.

Можно предполагать, что при нагрузке, действующей по всей длине балки, последняя будет перемещаться, как «штамп», не прогибаясь. При нагрузках q_2, q_1 , естественно, следует ожидать, что средняя часть балки должна прогнуться. При этом при нагрузке q_1 , которая приближается к сосредоточенной, прогибы в центральной части должны быть больше, чем при q_2 . На рис. 3.33 приведены графики реактивного давления (отпора) при коэффициентах постели упругого основания $c_0 = (10^6 - 10^8)$ Па/м для двух видов нагрузки. Для q_2 при $c_0 = 10^8$ Па/м, а для q_1 при $c_0 = 10^7$ и 10^8 Па/м отпоры имеют положительный знак, т.е. конец балки отрывается от уровня земли. Для выявления зоны отрыва необходимо решать нелинейную задачу, выполняя последовательные приближения, либо задачу с односторонними связями. Это выходит за рамки применяемой расчетной модели.

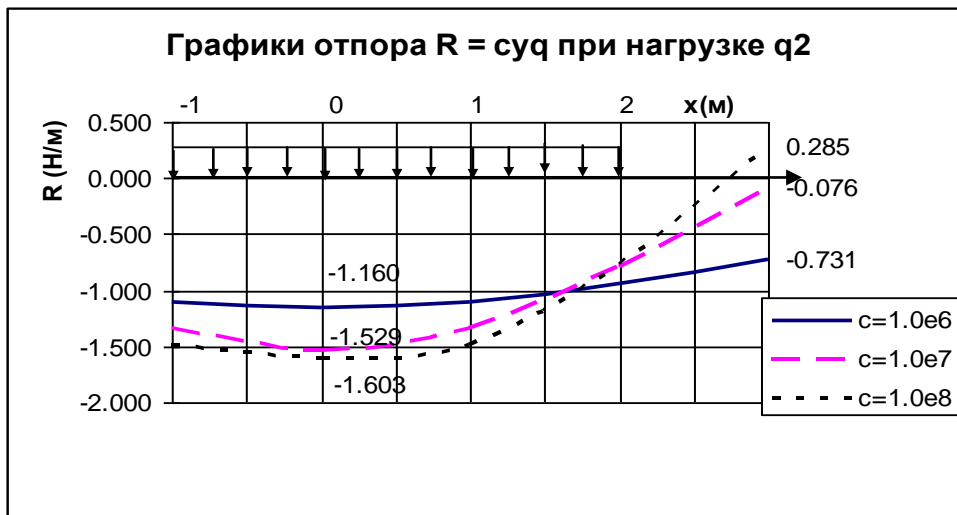


Рис. 3.33. Эпюры реактивного давления (отпора) при разных коэффициентах постели для нагрузки q_2

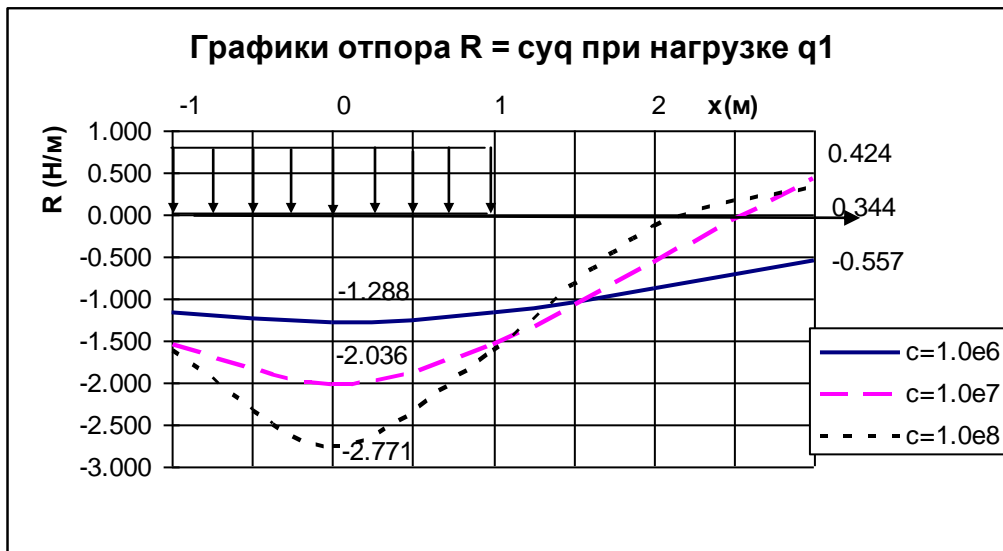


Рис.3.34. Эпюры реактивного давления (отпора) при разных коэффициентах постели для нагрузки q_1

На основе полученных результатов построены графики изменения отпора и изгибающего момента в центральном сечении в зависимости от параметра $\varphi = EJ / c$ (рис.3.35, 3.36). Введение параметра φ позволяет объединить многообразие балок с различными физико-геометрическими характеристиками с учетом различных коэффициентов упругого основания. Например, найденные для некоторого значения параметра φ отпор $R(\varphi)$, момент $M(\varphi)$, могут соответствовать балкам с различными сечениями, с разными модулями упругости (т.е. с разными изгибными жесткостями EJ), разными коэффициентами упругого основания.

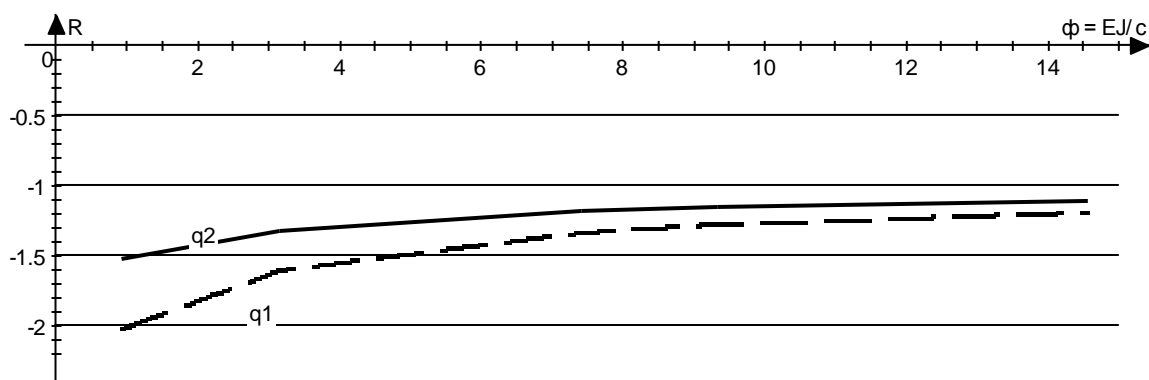


Рис. 3.35. Влияние изменения параметра ϕ на поведение отпора $R(\phi)$ в центральном сечении фундамента длиной 6 м

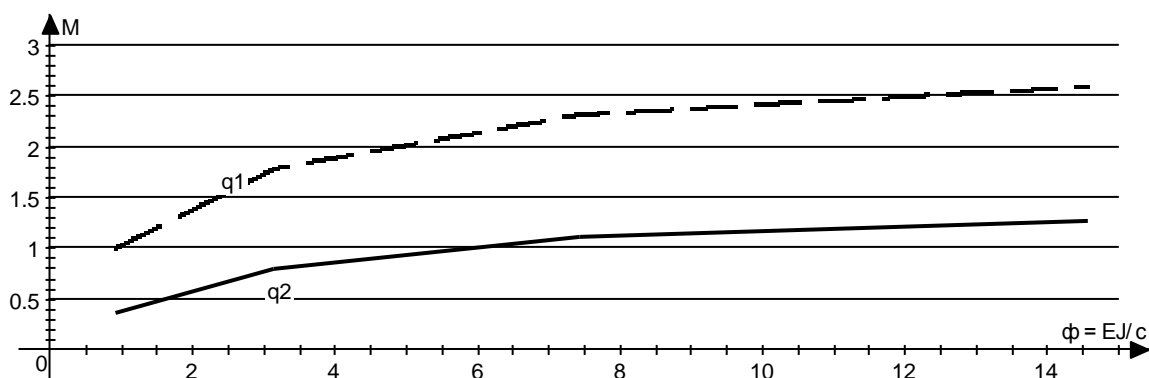


Рис.3.36. Влияние изменения параметра ϕ на поведение изгибающего момента $M(\phi)$ в центральном сечении фундамента длиной 6 м

Из результатов решений видно, что с увеличением коэффициента постели (уменьшением параметра ϕ) максимальные значения изгибающих моментов уменьшаются (рис. 3.37, 3.36), а с увеличением жесткости фундамента (увеличением ϕ) — увеличиваются (рис. 3.36). Естественно, от нагрузки q_1 , действующей на меньшей части балки, моменты имеют большие значения, чем от нагрузки q_2 (рис. 3.36).



Рис. 3.37. Влияние изменения коэффициента постели на поведение изгибающего момента M в центральном сечении фундамента длиной 6 м

Проведенный модальный расчет показывает, что для балок, лежащих на упругих основаниях с разными коэффициентами постели (10^6 и 10^7 Па/м), наблюдается совпадение форм колебаний при одинаковых номерах частот не всегда близких по значениям. Результаты для обычной балки совпадают с результатами балок на упругом основании, начиная с третьей частоты. Поскольку для простой балки при решении задано только одно условие закрепления ($u_x = 0$, т.е. учтена симметрия для горизонтальных перемещений, но поворот вокруг оси Oz в центральном сечении возможен), то первые две частоты выдаются нулевыми. На рис. 3.38а, 3.38б приведены формы собственных колебаний для балки на упругом основании.

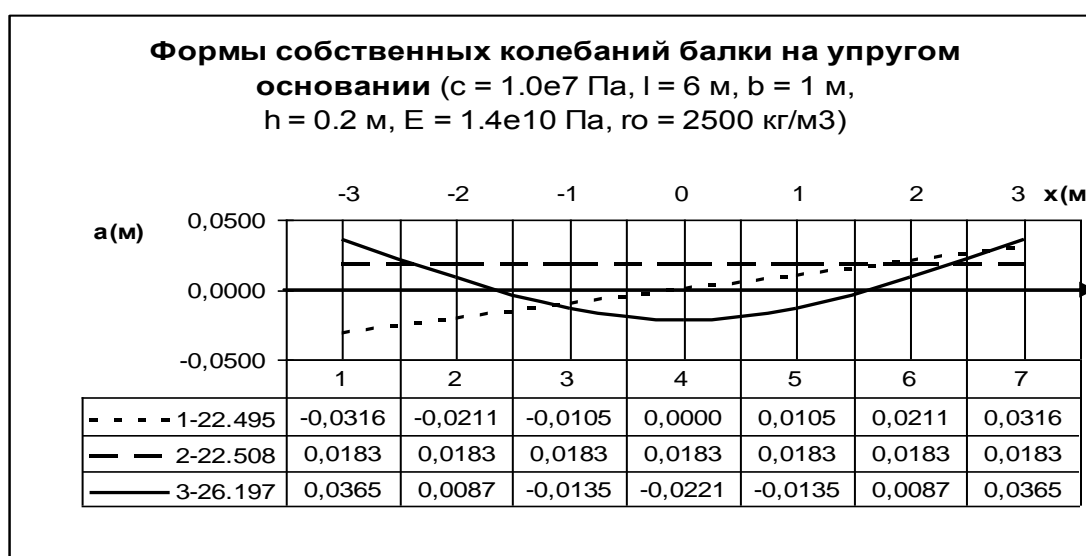


Рис. 3.38а. Формы колебаний для 1-й — 3-й частот

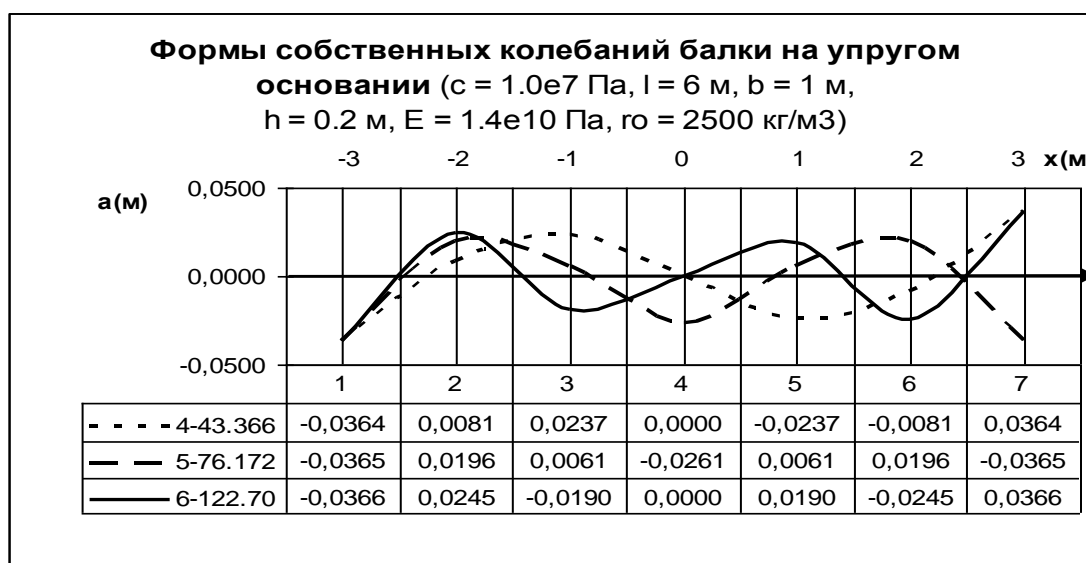


Рис. 3.38б. Формы колебаний для 4-й — 6-й частот

Замечание. Обратим внимание на тот факт, что на рис. 3.38 так же, как на рис. 3.33, 3.34, наблюдается «отрыв» от поверхности основания. Это говорит о том, что используемая модель не отражает реальную картину поведения балки, так как предполагает возможность растяжения между балкой и основанием, хотя на самом деле в данной задаче мы имеем односторонние связи. Кроме того, рассмотренная модель не включает инерционные силы основания, не учитывает, что в основании происходят волновые процессы, уносящие энергию колебаний.

Упражнение 1. Повторить решения задач по нахождению реактивного давления при приведенных выше исходных данных и построить графики отпора при нагрузках q_1 и q_2 при шаге сетки 0,5 м. Сравнить полученные значения R в сечениях $x = 0$ и $x = 3$ с приведенными на рис. 3.33 и 3.34.

Упражнение 2. Построить график изменения изгибающего момента в центральном сечении для балки длиной 9 м при геометрических характеристиках приведенных выше, при нагрузках q_1 , q_2 и q_3 . Результаты сравнить с графиками, данными на рис. 3.37.

Упражнение 3. Построить график изменения изгибающего момента в центральном сечении для балки длиной 12 м при геометрических характеристиках приведенных в примере 1, при нагрузках q_1 , q_2 и q_3 . Расчеты выполнить при шагах сетки 1 м и 0,5 м. Результаты сравнить с графиками, приведенными на рис. 3.38.

Плита на упругом основании

Аналогичного типа задача может быть рассмотрена для плиты: плита лежит на упругом основании.

В данном случае уравнение изгиба плиты на упругом основании получается по той же схеме, как и для балки, из уравнения С.Жермен

$$D\Delta\Delta w = q^*(x, y), \quad (3.5)$$

в котором нужно выполнить замену $q^*(x, y) = q_0 - cw - m\ddot{w}$, аналогичную тому, как было сделано для балки (здесь Δ — оператор Лапласа). В итоге получим уравнение

$$D\Delta\Delta w + m\ddot{w} + cw = q_0(x, y),$$

или

$$\Delta\Delta w + \frac{m}{D} \ddot{y} + \frac{c}{D} w = \frac{q_0(x, y)}{D}. \quad (3.6)$$

Имеем неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, решение которого, как читатель может догадаться, представляет еще большие трудности, чем решение уравнения (3.4).

Введем обозначения для параметров, аналогичные балочным: $X = m/D$ и $\varphi = qD/c$.

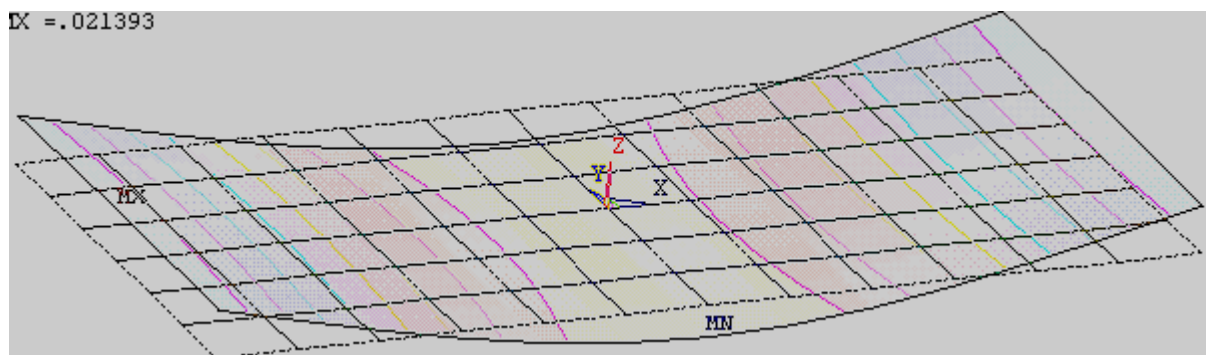
Далее приведены решения для плит на упругом основании, выполненные по программному комплексу ANSYS с использованием конечных элементов SHELL63, SHELL99.

Пример 9. Найти частоты и формы собственных колебаний плиты на упругом основании. Исходные данные: модуль упругости $E = 2e10$ Па, коэффициент Пуассона $\mu = 0,17$, коэффициент постели упругого основания $c_0 = 10^6$ и 10^7 Па/м, плотность бетона $\rho = 2500$ кг/м³, размеры плиты в плане 6х3 м, толщина $h = 0,2$ м (шаг сетки при расчетах принят равным 0,5 м).

Данная задача соответствует модальному анализу — Modal Analysis. Ниже приведены результаты расчета собственных колебаний плиты (частоты и формы колебаний). При решении принято, что плита на оси симметрии Oy не имеет смещений u_x , а на оси Ox — смещений u_y , углы поворота на осях ненулевые (что позволяет получать как симметричные, так и обратно симметричные формы колебаний).

Начиная с четвертого шага, частоты для простой плиты и плиты на упругом основании совпадают с точностью до 1%. Приведем формы собственных колебаний для 4-й и 5-й частот.

$$f_4 = 28.125, \quad SMN = -0.13543, \quad SMX = 0.021423$$



$$f_5 = 31.331, \quad SMN = -0.027208, \quad SMX = 0.027208$$

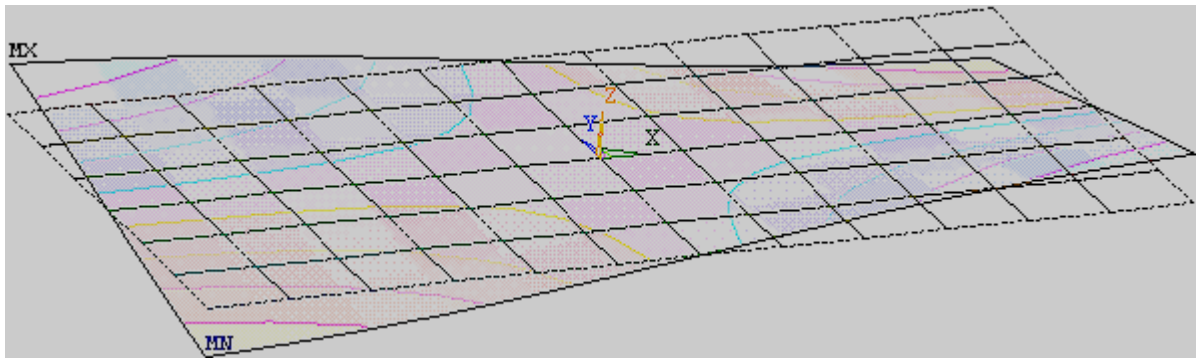


Рис.3.39. Формы колебаний для плиты размерами 6x3x0,2 м

Формы колебаний для одинаковых номеров частот, начиная с четвертой, совпадают для простой плиты и плит на упругом основании (для $c_0 = 10^6, 10^7$ Па/м).



Рис. 3.40

Анализ показал, что изменение параметра ϕ практически не влияет на формы колебаний, которые совпадают с выше приведенными, но влияет, хотя и по-разному, на величины частот. На первые три частоты изменение значений параметра ϕ в данном диапазоне практически не сказывается: первая частота меняется в пределах 22,497 — 22,505, вторая — в пределах 22,647 — 22,659, третья — в пределах 23,110 — 22,120. Графики изменения 9-й и 10-й частот практически совпадают. Изменения 4 — 8-й частот проиллюстрированы на графиках (рис.3.41).

Для того, чтобы добиться попадания частот собственных колебаний в нужный диапазон, необходимо расширить пределы изменения параметра ϕ .

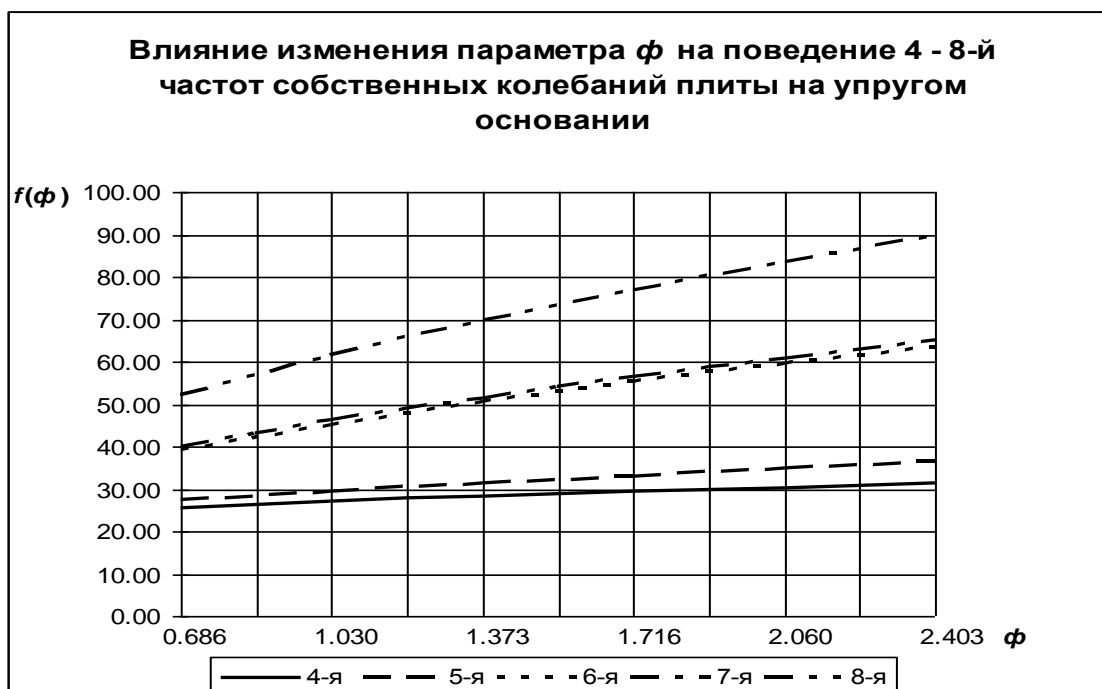


Рис. 3.41

Упражнение 3. Построить эпюры отпора для рассмотренной в Примере 2 плиты с теми же исходными данными при $c_0 = 10^6 \text{ Па/м}$, 10^7 Па/м .

Пример 10. Подвергнуть плиту с исходными данными из Примера 9 гармоническому анализу и получить перемещения на заданном интервале частот, форму колебаний на резонансных частотах.

Для решения задачи можно использовать модель из предыдущего примера, внося некоторые поправки.

Прежде всего, нужно задать вид анализа — гармонический (Harmonic Analysis), затем — амплитудное значение вынужденной вибрационной нагрузки, меняющейся по синусоидальному закону. Ее можно взять равной $1 \cdot q$ Н, тогда значения всех получаемых параметров нужно умножить на q .

Выделив интервал частот в пределах от 0 до 100 с шагом 0.1, получим спектр частот для вибрационной нагрузки. Выбрав три узла, например, в центре плиты (1), в центре одной из квадратных половин плиты (2) и посередине короткой стороны (3), построим графики значений перемещений в заданных узлах в зависимости от частот (рис. 3.40-).

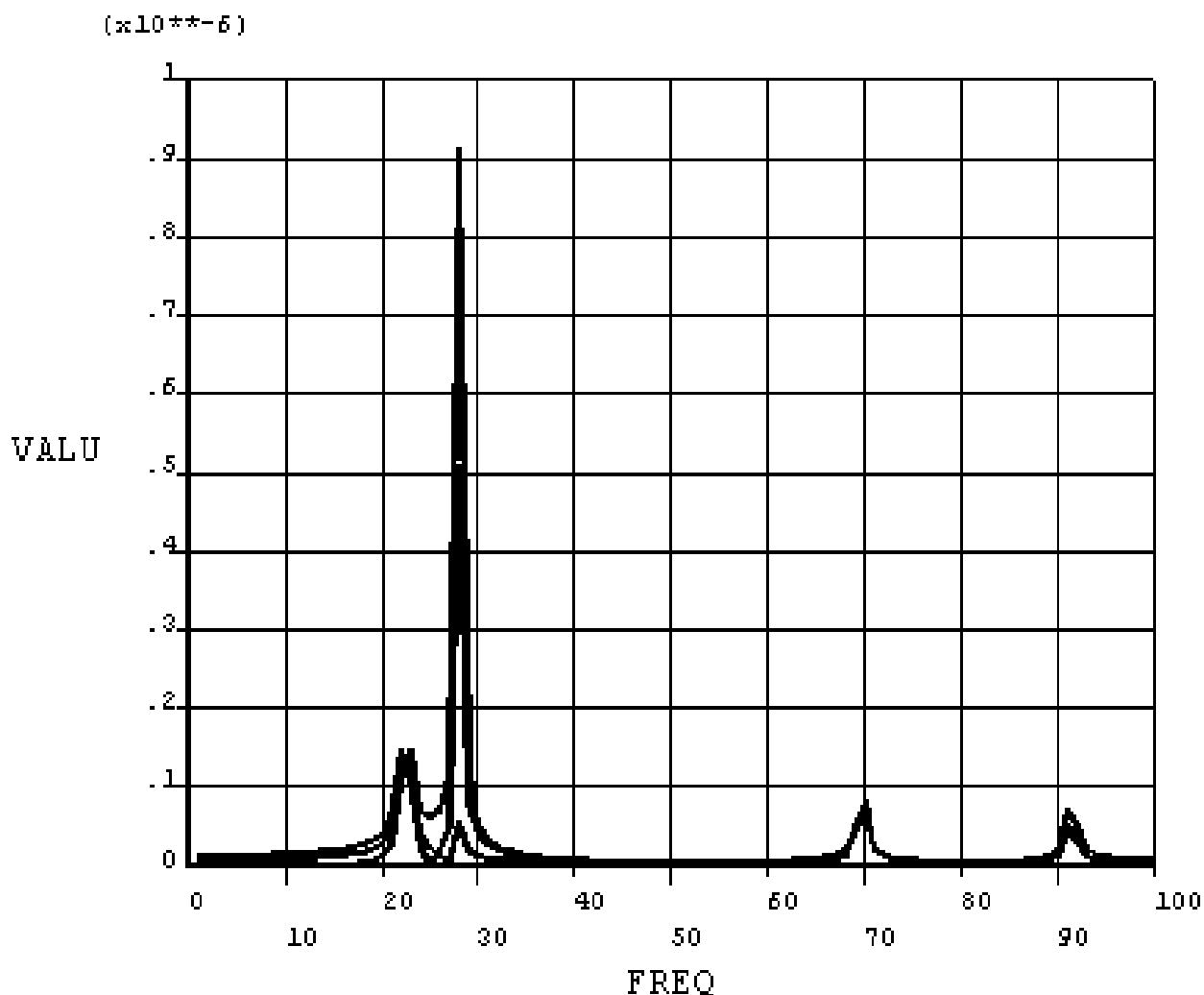


Рис. 3.42

Всплески значений перемещений (резонансы) наблюдаются при частотах, совпадающих с частотами собственных колебаний $f_1 = 22,205$, $f_4 = 28.125$, $f_8 = 69,637$, $f_{11} = 91,410$, которые соответствуют симметричным формам колебаний. Для обратно симметричных форм, которым соответствуют частоты 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10-я, резонанс не наступает. На рис. 3.42 наибольшие пиковые значения соответствуют точке (3).

Форма колебаний совпадает с соответствующими формами для свободных колебаний (рис. 3.39).

Упражнение 4. Выполнить решение Примера 3 при коэффициентах упругого основания 10^6 и 0^8 Па/м.

Заключение. При решении задач о колебаниях возникает вопрос: как соотносятся значения частот собственных колебаний и частот вынужденных колебаний, возникающих от внешней вибрационной нагрузки. При их совпадении возникает резонанс, приводящий к разрушению конструкции.

Рассмотренная модель для плиты (как и для балок) дает приближенные решения и не отражает истинный характер поведения конструкции. Здесь справедливо то же самое замечание, которое было высказано выше.

Пример 11. Выполнить расчет ребристой железобетонной плиты (3 x 18 м) на упругом основании (рис. 3.43.). Материал плиты бетон тяжелый класса В 30. Толщина плиты 6см, сечение продольных и поперечных ребер 10x14 см. Упругое основание неоднородно, представлено скалистым слоем (модуль упругости $E=50000 \text{ кН/м}^2$, коэффициент Пуассона $\mu=0,27$, толщина слоя 2м) и слабым (насыпным) слоем с модулем упругости $E=11000 \text{ кН/м}^2$ и коэффициентом Пуассона $\mu=0,35$.

Оценить влияние жесткости грунта на напряженно деформированное состояние (НДС) плиты. Грунты заданы физическими постоянными E и μ . Проанализировано влияние жесткости грунта на НДС плиты.

Решение. Расчет выполнен с применением ПК SCAD. Плита аппроксимирована 216 прямоугольными конечными элементами размером 0,5 x 0.5 м, ребра - стержнями прямоугольного поперечного сечения, прикрепленными к плите с помощью жестких вставок с шагом 0,5м

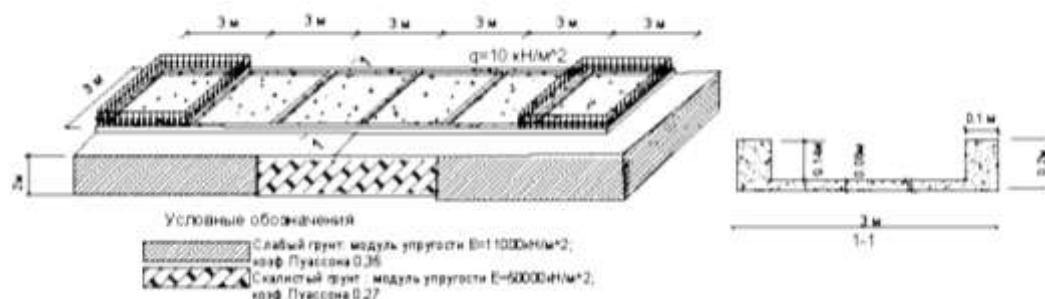


Рис.3.43 Расчетная схема

Результаты расчета. На рис.3.44 а представлен общий вид деформированной схемы плиты под действием нагрузки интенсивностью 10 кН/м^2 , на рис. 3.44 б показана часть числового поля, характеризующего величины прогибов точек плиты.

На рис. 3.45 а изображено изополе распределения изгибающих моментов в поле плиты (в направлении оси $X M_x$), на рис 4.32 б — увеличенная зона с max моментами M_x .

На рис. 3.46 — тоже для изгибающих моментов M_y .

На рис. 3.47— тоже для изгибающих моментов M_y в ребрах плиты.

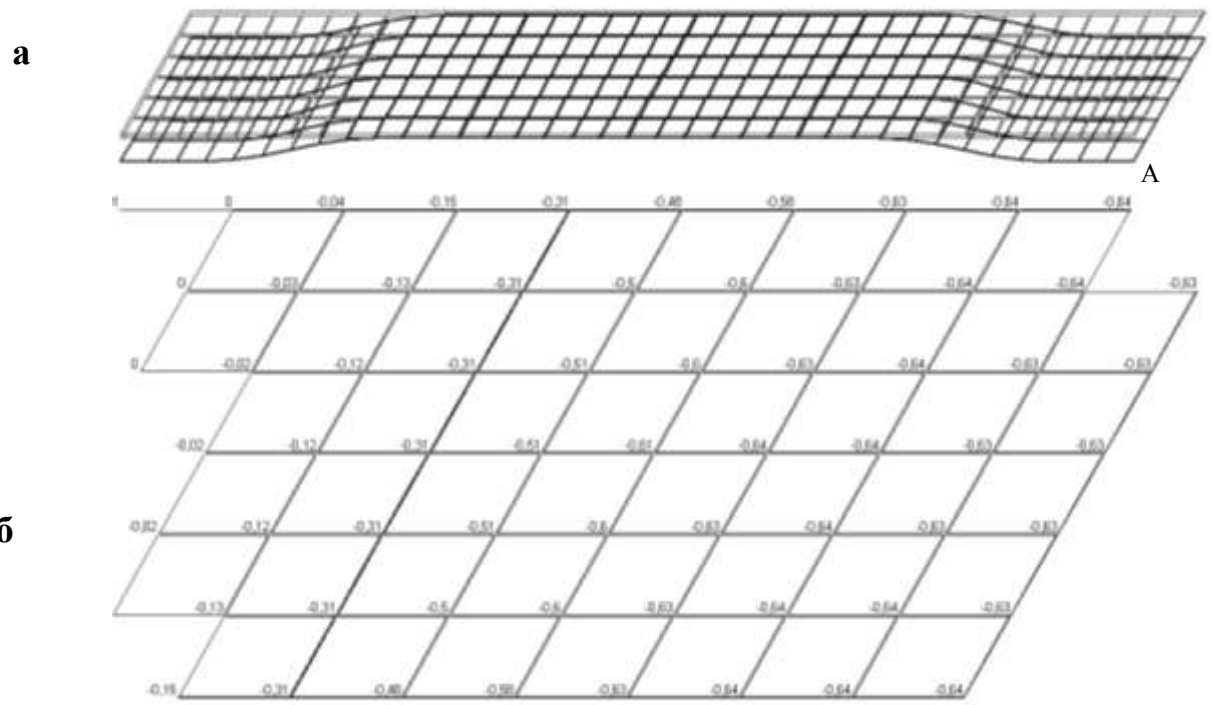
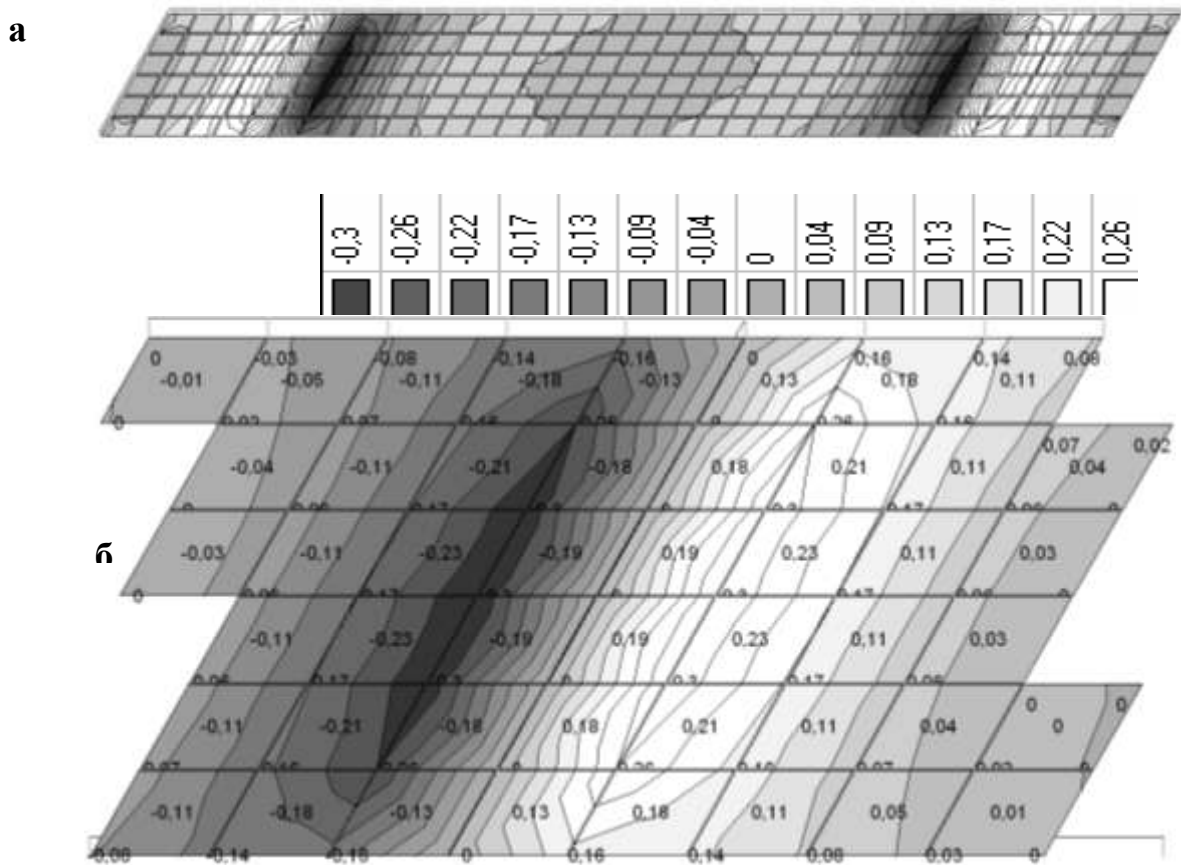


Рис.3.44 Деформированная схема
 а - общий вид, б - фрагмент с оцифровкой макс перемещений (мм)



3.45. Изополе распределения изгибающих моментов M_x в поле плиты

(кН м/м): а — общий вид, б — фрагмент с макс усилиями

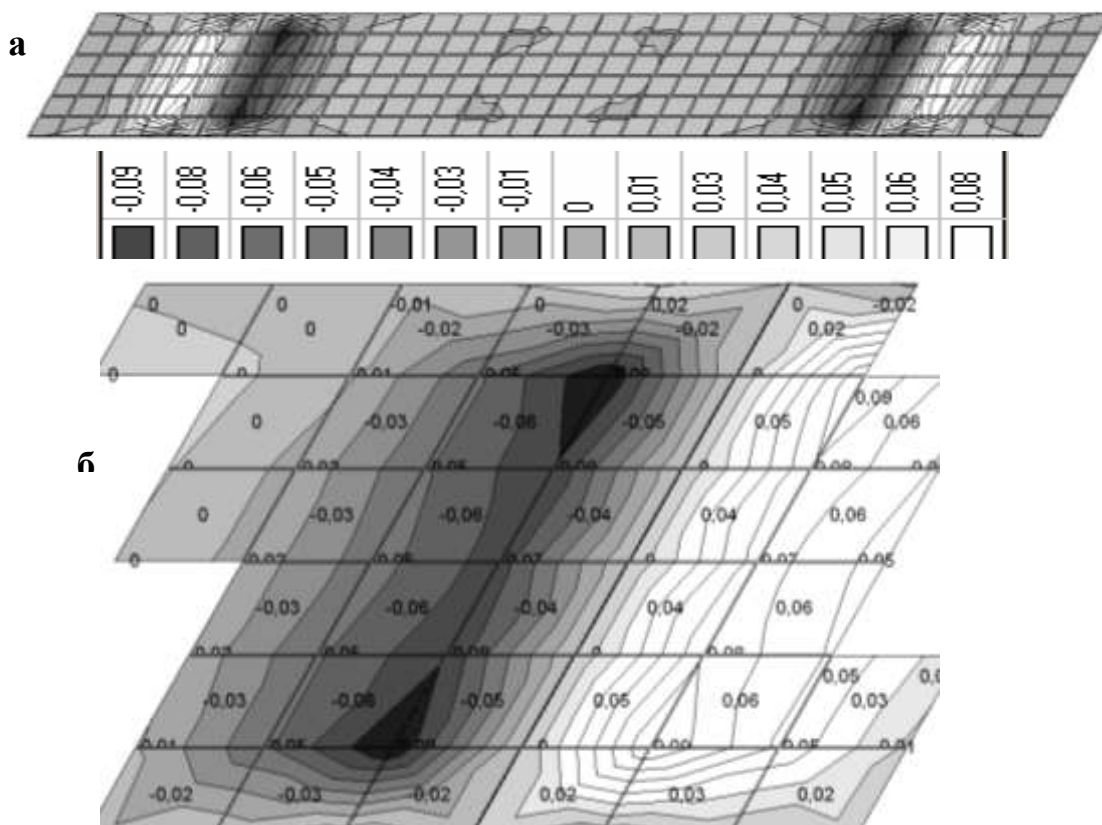


Рис 3.46. Изополе распределения изгибающих моментов поле плиты M_y (кН м/м)
а — общий вид, б — фрагмент с макс усилиями

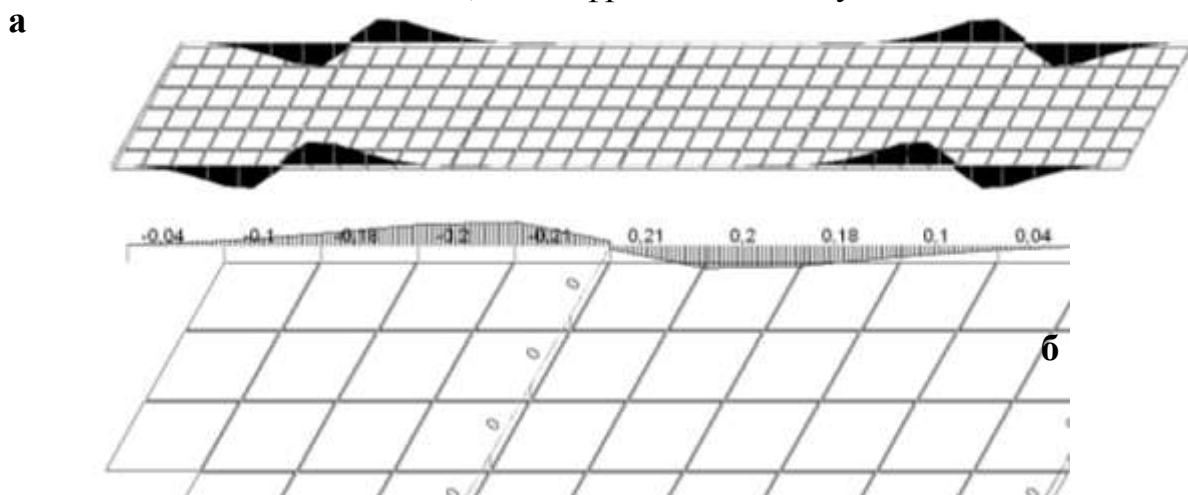


Рис. 3.47 Эпюры изгибающих моментов M_y в ребрах плиты (кН м)
а - общий вид, б - фрагмент с макс усилиями

На рис 3.48 представлено сравнение максимальных величин прогибов (W_{max}) и изгибающих моментов в поле плиты M_x^{max} и M_y^{max} в зависимости от соотношения жесткостей плиты и основания ($K=EJ_{плиты}/C_1$, C_1 – коэффициент постели, определяемый ПК SCAD).

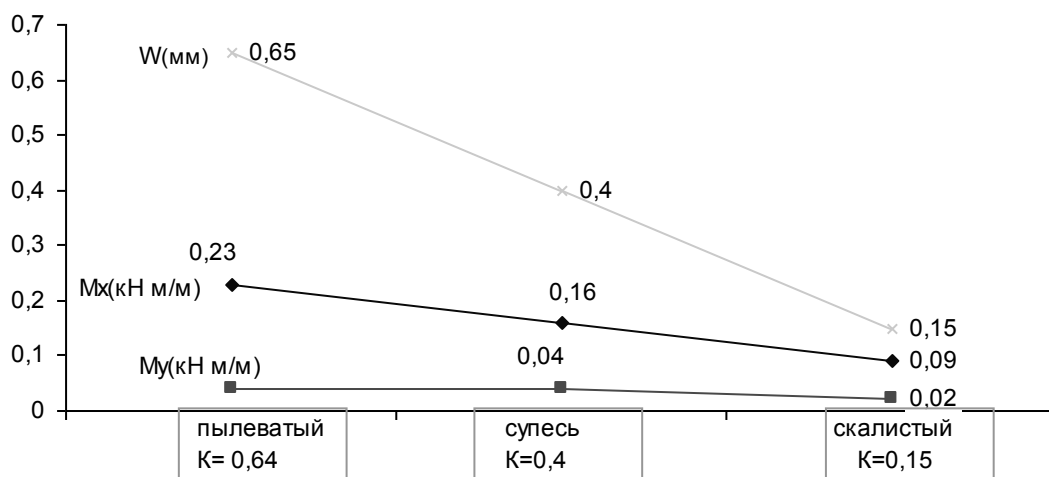


Рис. 3.48 Зависимость НДС плиты от жесткости основания

Анализ полученных результатов

1. Перемещения наблюдаются только в нагруженных зонах плиты, \max прогибы составляют 0,65 мм.
2. На границах нагруженной и незагруженной части плиты наблюдается концентрация усилий как в поле плиты так и в продольных ребрах.
3. Изгибающие моменты в направлении оси x намного больше чем в направлении оси y ($M_x^{\max} = 0,23$ кН м/м, $M_y^{\max} = 0,09$ кН м/м).
4. Анализ НДС плиты, расположенной на однородном грунте *слабом* или *скалистом* показал :
 - качественная картина деформированного состояния и распределения усилий (M_x , M_y) остается такой же как в рассмотренном примере .
 - величина \max прогибов плиты , лежащей на слабом грунте (0,65 мм) в 4 раза больше прогибов плиты расположенной на скалистом грунте (0,15 мм) при одинаковом нагружении.
 - по величине усилия отличаются в 2 раза ($M_x^{\max} = 0,23$ кН м/м в плите на слабом грунте и $M_x^{\max} = 0,09$ кН м/м - на скалистом).

3.3. Решение задач оптимизации конструкций

Задачи оптимального проектирования решает инженер, когда создает конструкцию, стремясь обеспечить максимальную ее технико-экономическую эффективность при соблюдении условий надежности, долговечности, технологичности, эстетических требований и директивных ограничений [3.1,3.2].

Оптимальный (от лат. *optimus*) означает наилучший. Напомним общую математическую формулировку задачи оптимизации: найти минимум целевой функции

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \rightarrow \min, \quad \text{где } \mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \quad (3.7)$$

при ограничениях наложенных на $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$, которые в общем случае могут быть представлены как $\mathbf{x} \in \mathbf{U}$, где \mathbf{U} - заданное подмножество в множестве \mathbf{x} всевозможных наборов параметров оптимизации $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Чаще всего \mathbf{U} определяется набором уравнений и неравенств (например, уравнения равновесия и неравенства, утверждающие, что напряжения не должны превышать допускаемых величин). В таких случаях ограничения конкретизируются:

$$\begin{aligned} \varphi(x) = 0, & \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n); \\ \psi(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, & \quad \psi = (\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n), \end{aligned} \quad (3.8)$$

Здесь φ, ψ - наборы функций от переменных $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$.

Если целевых функций не одна, а несколько, то задача оптимизации становится многокритериальной [3.12].

Таким образом, постановка задачи оптимизации включает в себя набор параметров проекта, критерий *оптимальности и ограничения на параметры*, чаще всего в форме (3.2); оптимизация представляет собой *поиск экстремума* (максимума или минимума) целевой функции $\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ при ограничениях (3.2). Наличие неравенств или других сложных ограничений делает поиск экстремума сложным и трудоемким. При этом неравенства заменяются специальной системой уравнений [3.12].

Выбор критерия оптимальности — одна из важных проблем оптимального проектирования. Наиболее общим критерием, по-видимому, может служить стоимость конструкции. Но учесть все факторы, влияющие на стоимость, обычно невозможно, и на практике чаще всего применяют более простые критерии.

Сложность математической задачи оптимизации обусловлена, как правило, трудностями удовлетворения разных математических ограничений. Если ограничений нет, то найти минимум целевой функции часто несложно,

но такие решения не имеют практической ценности. Если ограничение одно, то задача решается просто. Например, в простой балке постоянного сечения, нагруженной заданной нагрузкой минимальный вес достигается при удовлетворении прочности. Опасное сечение одно. Из условия прочности находят параметр сечения и тем самым удовлетворяют целевой функции веса (объема). Если опасных сечений несколько, или несколько вариантов нагружения – то задача усложняется и решить ее можно только путем поиска минимума.

Уровень развития методов оптимизации в настоящее время такой, что существует разрыв (противоречия) между многими требованиями создания реальных конструкций и технологией их изготовления (т.е. действительными схемами) и идеализированными математическими моделями (расчетными схемами). Поэтому создание реальных оптимизированных конструкций все еще остается сложной задачей. На практике используется так называемая практическая оптимизация, которая образована на основе синтеза математической оптимизации и инженерных методов (средств) конструирования и расчета.

Наибольшее развитие для реально проектируемых конструкций получили задачи, в которых в качестве критерия оптимальности принят вес или объем при соблюдении условий прочности, жесткости и устойчивости, а также конструктивных ограничений.

При этом оптимизационная задача сводится к определению вектора параметров проектирования (оптимизации) $h(z_i) = (h_1, h_2, \dots, h_N)$ соответствующего минимуму, например, объема конструкции, принимаемого в качестве целевой функции

$$V(h) = \min \left(\sum_{i=1}^m A_i \cdot h_i \right), \quad (3.9)$$

при ограничениях:

по прочности

$$\sigma_{\text{экв.}}^{\text{max}} \leq [\sigma]^{\pm}, \quad (3.10)$$

по жесткости

$$y_{\text{max}} \leq [y], \quad (3.11)$$

по эйлеровой устойчивости сжатых стержней

$$\sigma_i \leq \sigma_k, \quad (i = 1, \dots, p), \quad (3.12)$$

на собственные частоты

$$\omega = [\omega] \quad (3.13)$$

на пределы изменения переменных проектирования

$$h(z_i) \geq h_0, \quad (i = 1, \dots, n). \quad (3.14)$$

Здесь: A_i - площадь в плане двумерного или длина одномерного элемента; h_i - толщины двумерных или площади поперечных сечений одномерных элементов; $\sigma_{экв.}^{max}$ - величина эквивалентного напряжения; $[\sigma]^\pm$ - максимально допустимое значение интенсивности напряжений на растяжение и сжатие (расчетное сопротивление); $[y]$ – максимально-допустимый прогиб конструкции; σ_k - критическое напряжение потери устойчивости стержневых элементов; $[\omega]$ - заданная частота собственных колебаний; h_0 - минимально допустимая толщина двумерного или площадь поперечного сечения одномерного элементов.

Для некоторых задач условие наименьшего объема удастся заменить еще более простым (например, критерием равнопрочности для статически определимых систем или критерием наибольшей жесткости при заданном объеме).

В математическом отношении задачи оптимального проектирования сводятся к поиску экстремума (чаще всего условного) какой-либо (целевой) функции (минимум стоимости, объема, максимум жесткости) и значений параметров, при которых этот экстремум достигается.

Если требуется отыскать *конечное число* оптимальных параметров, то задача относится к *математическому программированию*; если же оптимизируемыми параметрами являются *функции* одной или нескольких переменных, то задача называется *вариационной*.

Весьма часто одним критерием нельзя охватить противоречивые требования к конструкции (например, вес, прочность и т. д.). Приходится вводить несколько критериев, и задача становится многокритериальной [12]. Ряд факторов – ограничений, например, технологичность, не удастся формализовать и приходится упрощать математическую задачу. Поэтому выбор постановки оптимизационной задачи и ее оценка является привходящим фактором инженерного подхода к задачам оптимизации.

Применение современных методов оптимизации для решения реальных задач невозможно без мощных вычислительных машин. Поэтому при выборе метода решения той или иной задачи следует иметь в виду не только его точность и простоту реализации, но и возможности конкретной ЭВМ.

Современное состояние оптимального проектирования таково, что методы математического программирования и вариационные методы оказываются еще весьма сложными, требуют больших объемов вычислений и пото-

му пока редко используются в инженерной практике. Поэтому в ряде случаев для решения частных задач применяются другие специальные методы [3.3, 3.4, 3.5]. Некоторые из них позволяют только улучшить конструкцию, т. е. решить задачу частичной оптимизации (например, *метод заданных напряжений* для расчета статически неопределимых систем [3.3]). Так как в результате "полной" оптимизации, например, по критерию наименьшего объема, часто получаются слишком сложные, нетехнологичные конструкции, то указанные специальные методы могут в некоторых случаях давать практически лучшие результаты, чем "точные" математические методы оптимизации. Причина такого положения очевидна: при построении математической модели очень трудно учесть все факторы, влияющие на эффективность конструкции. Можно с уверенностью сказать, что с развитием точных методов оптимизации положение изменится в их пользу.

Обзор работ по оптимальному проектированию конструкций дан в [3.1]. Возможности методов оптимального проектирования освещены также в [3.6 – 3.12].

Для решения задач оптимизации конструкций разработано большое число, как специализированных программ, так и универсальных расчетных программных комплексов (COSMOS, ANSYS, NASTRAN) и др., в которых есть встроенные оптимизаторы, позволяющие решать различные по постановке задачи оптимизации конструкций.

В программном комплексе ANSYS [3.14] решение задач оптимизации представляет собой компьютерную технологию, состоящую в выборе оптимального проекта из нескольких с помощью конечно-элементного анализа. Разработчик выбирает критерий и ограничения задачи и создает параметрическую модель. Процедура оптимизации управляет выполнением анализа на основе принятия решения о значениях параметров, используемых при пробных расчетах. Средства оптимизации программы ANSYS позволяют оптимизировать различные объекты проекта: форму нагруженного элемента или конструкции, значение напряжений, собственные частоты, стоимость или вес конструкции и др.

Основными методами оптимизации в программе ANSYS являются: метод аппроксимации и метод первого порядка. Как указано в документации для ANSYS, метод аппроксимации (метод нулевого порядка) использует сглаживающую аппроксимацию целевой функции и всех переменных состояния. Это общий метод, эффективно применимый к широкому кругу инженерных задач. Метод первого порядка использует производные – градиен-

ты зависимых переменных по отношению к переменным состояния. Он отличается высокой точностью и хорошо работает для задач, где зависимые переменные могут варьироваться в широком диапазоне. Однако, метод первого порядка требует значительных затрат машинных ресурсов.

Пользователь имеет также возможность запрограммировать собственный метод оптимизации.

Рассмотрим некоторые примеры решения задач оптимизации конструкций по программному комплексу ANSYS.

Пример 1. Требуется определить оптимальную по объему, плоскую статически неопределимую ферму (рис.3.1) при следующих исходных данных: пролет и высота фермы $a = 4$ м; модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; начальное поперечное сечение стержней – два спаренных равнобоких уголка 180x11, $\Gamma A = 77,6 \text{ см}^2$. Нагрузка $P = 900 \text{ кН}$;

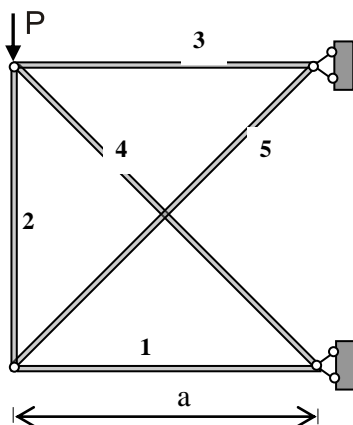


Рис. 3.48. Заданная схема фермы

Подходящими конечными элементами (КЭ) для стержней плоских ферм являются стержневые элементы LINK1. Узлы конечно-элементной модели будут тогда совпадать с шарнирными узлами фермы, а каждый стержень будет отдельным КЭ.

Предварительный расчет фермы по программе ANSYS дал следующие результаты: максимальный прогиб начального проекта фермы составил 0,00495 м, наибольшее сжимающее напряжение $\sigma = 91,5$ МПа возникает в стержне 4. Видим, что ферма является недонапряженной конструкцией и имеются резервы для уменьшения ее объема.

Постановка задачи оптимизации: $V(A_i) \rightarrow \min$.

Параметры оптимизации: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 - площади поперечных сечений стержней.

Ограничения: по напряжениям $[\sigma]^{\pm} = 200 \text{ МПа}$ и максимальному прогибу $[y] = 1 \text{ см}$; минимально допустимое значение площади поперечного сечения стержня $[A] = 10 \text{ см}^2$.

Для решения задачи оптимизации в программе ANSYS выбран метод первого порядка.

Результаты оптимизации фермы приведены в табл.3.1.

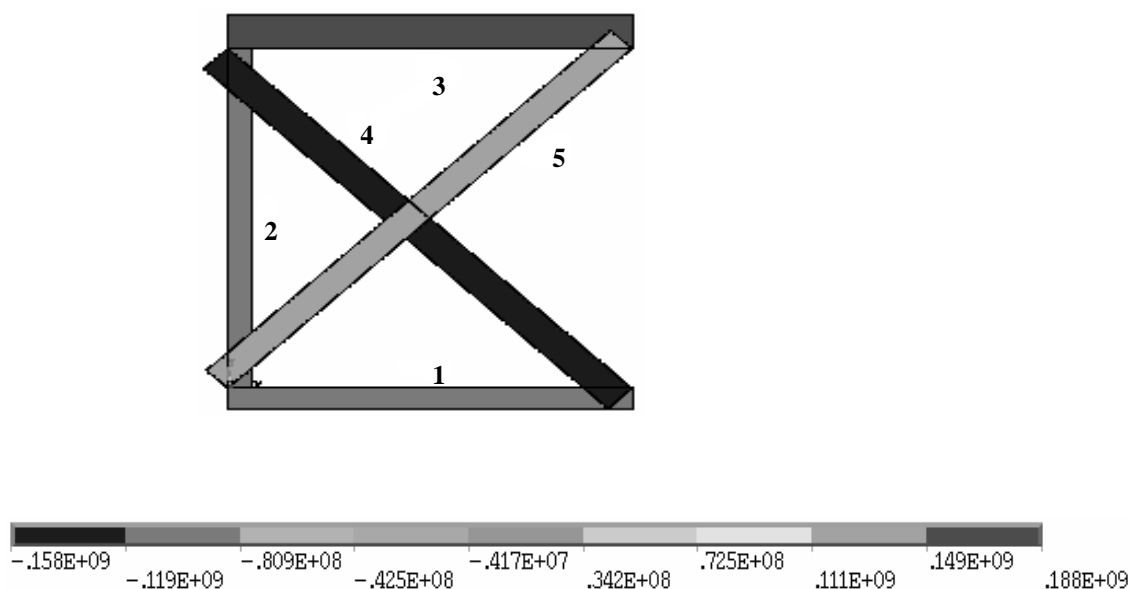


Рис. 3.49. Эпюра напряжений (Па) оптимального проекта фермы

Для получения заданной точности решения задачи оптимизации понадобилось 8 итераций метода первого порядка. Напряжения в стержнях оптимального проекта фермы показаны на рис. 3.2. При этом максимальный прогиб оптимального проекта составил 1,0 см, а наибольшее напряжение 188 МПа возникает в стержне 3.

Объем начального проекта фермы составил $0,181 \text{ м}^3$. Объем оптимального проекта фермы без учета потери устойчивости сжатых элементов равен $0,08269 \text{ м}^3$. Таким образом, экономия материала фермы составила 54,3%.

Решим эту же задачу оптимизации, изменив конструктивные ограничения - примем минимально допустимое значение площади поперечного сечения стержней $[A] = 0,01 \text{ см}^2$ (практически нулевые поперечные сечения).

Для решения задачи понадобилось 9 итераций метода первого порядка. Полученные площади поперечных сечений стержней приведены в табл.3.1.

Таблица 3.9

Стержни	Площадь сечений стержней, см ²		
	Начальный Проект	Оптимальные проекты [A] = 10 см ² [A] = 0,01 см ²	
1	77,6	28,14	4,71
2	77,6	28,14	3,0
3	77,6	31,03	52,8
4	77,6	52,23	77,6
5	77,6	32,20	69,7

Напряженное состояние полученного оптимального проекта фермы показано на рис. 3.3.

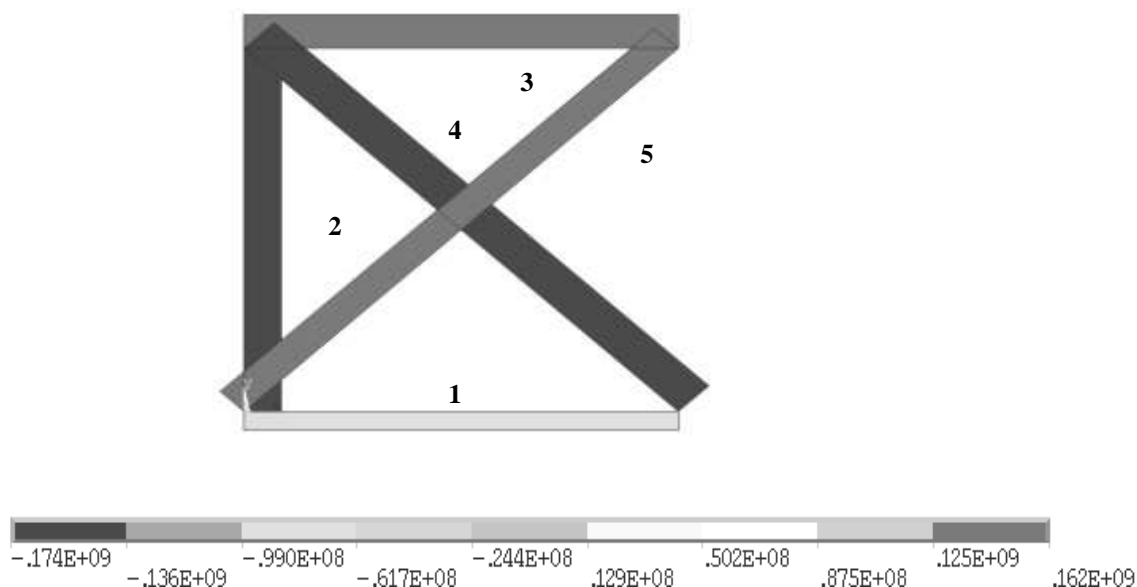


Рис. 3.50. Эпюра напряжений (Па) оптимального проекта фермы при [A] = 0,01 см²

Объем оптимального проекта фермы стал равным 0,0663 м³. При этом общее уменьшение объема составила 63,4%. Видим, что ослабление конструктивных ограничений задачи позволило улучшить оптимальное решение.

Анализ оптимальных проектов фермы (табл.3.9) показывает, что наименьшие сечения соответствуют стержням 1 и 2. Отбросив данные стержни и присоединенный к ним стержень 5, получим статически определимую ферму в виде двухстержневого кронштейна (рис. 3.51).

Исследуем насколько “хуже” или “лучше” эта ферма (при $A = 77,6 \text{ см}^2$) по сравнению с оптимальной статически неопределимой фермой.

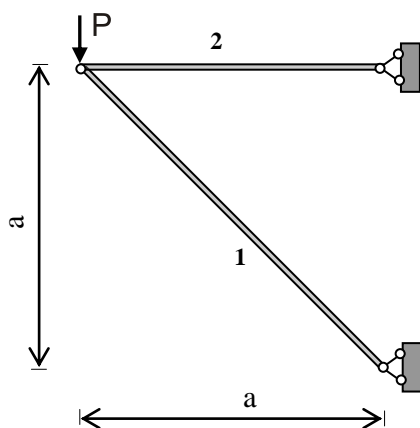


Рис. 3.51. Схема двух стержневого кронштейна

Расчет по программе ANSYS дал следующие результаты: объем статически определимой фермы составил $0,07494 \text{ м}^3$, что на 11,5 % больше, чем объем оптимального проекта статически неопределимой фермы. При этом максимальный прогиб равен $0,0089 \text{ м}$, а наибольшее напряжение возникает в стержне 1 и равно 164 МПа . Видим, что ферма, полученная путем практической оптимизации (на основе анализа работы конструкции и здравого смысла), является достаточно эффективной для восприятия заданной нагрузки, но несколько уступает, по расходу материала, оптимальному проекту статически неопределимой фермы.

Решим задачу оптимизации объема полученной статически определимой фермы по программе ANSYS, при двух параметрах проектирования: A_1 , A_2 ; ограничениях по напряжениям $[\sigma]^{\pm} = 200 \text{ МПа}$ и максимальному прогибу $[y] = 1 \text{ см}$. Поперечные сечения стержней оптимального проекта получились равными: $A_1 = 0,76 \text{ см}^2$, $A_2 = 0,54 \text{ см}^2$. Максимальный прогиб равен $1,0 \text{ см}$, а напряжения в стержнях 1 и 2 составили 168 и 165 МПа . При этом объем фермы равен $0,0645 \text{ м}^3$, что на 14 % меньше, чем начальный проект этой же фермы и на 3 % меньше оптимального проекта статически неопределимой фермы.

Полученные оптимальные проекты фермы необходимо уточнить, например, учитывая в ограничениях потерю устойчивости сжатых элементов. Кроме того, необходимо учитывать и затраты, например, на узловые соединения - в статически определимой ферме количество узлов меньше и они проще.

Пример 2. Определить оптимальную по объему, квадратную шарнирно опертую по контуру плиту ступенчато-переменной толщины при действии равномерно распределенной нагрузки $q = 20 \text{ кН} / \text{м}^2$. Исходные дан-

ные: металлическая плита размером $L = 3\text{ м}$; поле плиты разделено на 64 зоны (рис.3.52 б) с толщинами t_i (с учетом симметрии плиты и нагрузки $i = 10$); начальная толщина плиты $t = 0.05\text{ м}$; $E = 2 \cdot 10^5\text{ МПа}$, $\mu = 0,3$.

Для аппроксимации плиты использовался тонкий, 4-х узловой оболочечный элемент SHELL63 с автоматической генерацией конечно-элементной сетки.

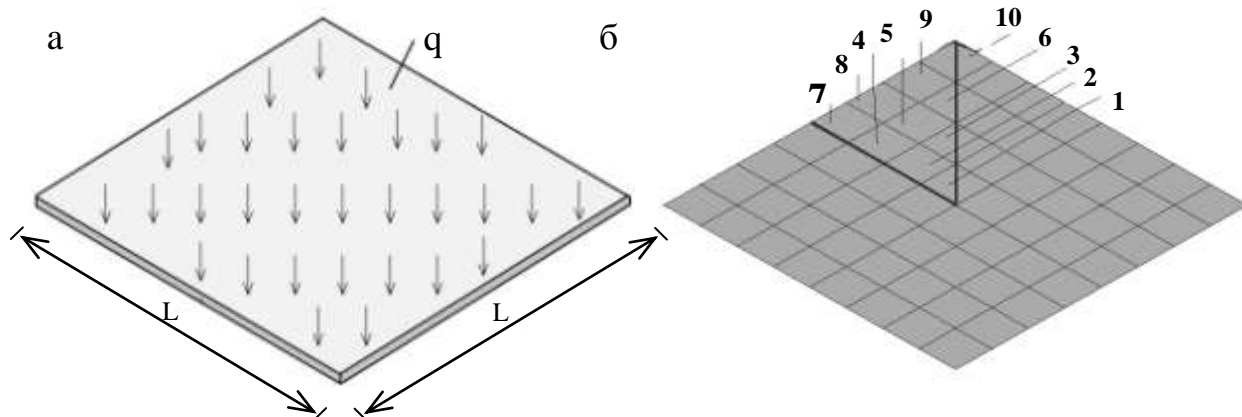


Рис. 3.52. Характерные зоны плиты для назначения параметров оптимизации

Предварительный расчет начальной плиты постоянной толщины (рис. 3.52 а) на заданную нагрузку по программе ANSYS дал следующие результаты: максимальный прогиб составил $0,00287\text{ м}$, наибольшее напряжение $\sigma_{\text{экв.}}^{\text{max}} = 24,2\text{ МПа}$. Напряженное состояние начального проекта плиты показано на рис. 3.53 а. Как видно из эпюры эквивалентных напряжений, в большинстве зон плиты постоянной толщины, материал недонапряжен. Возникает задача более рационального распределения материала путем создания плиты ступенчато переменной толщины, оптимальной по объему.

Постановка задачи оптимизации: $V(t_i) \rightarrow \min$.

В качестве параметра оптимизации примем толщины t_i разных зон плиты. Количество параметров оптимизации - 10.

Ограничения: по эквивалентным напряжениям $[\sigma] = 200\text{ МПа}$ и максимальному прогибу $[y] = 0.01\text{ м}$; минимально допустимое значение толщины плиты $0,01\text{ м}$.

Для решения задачи оптимизации понадобилось 5 итераций метода первого порядка. Напряженное состояние оптимального проекта плиты ступенчато-переменной толщины показано на рис. 3.53 б. При этом максимальный прогиб плиты составил $0,0098\text{ м}$, а наибольшее эквивалентное напряжение $58,4\text{ МПа}$ – это почти на треть меньше допускаемого, т.е. решение зада-

чи оптимизации было завершено при достижении ограничения по максимальному прогибу, при общем недонапряжении плиты ступенчато переменной толщины.

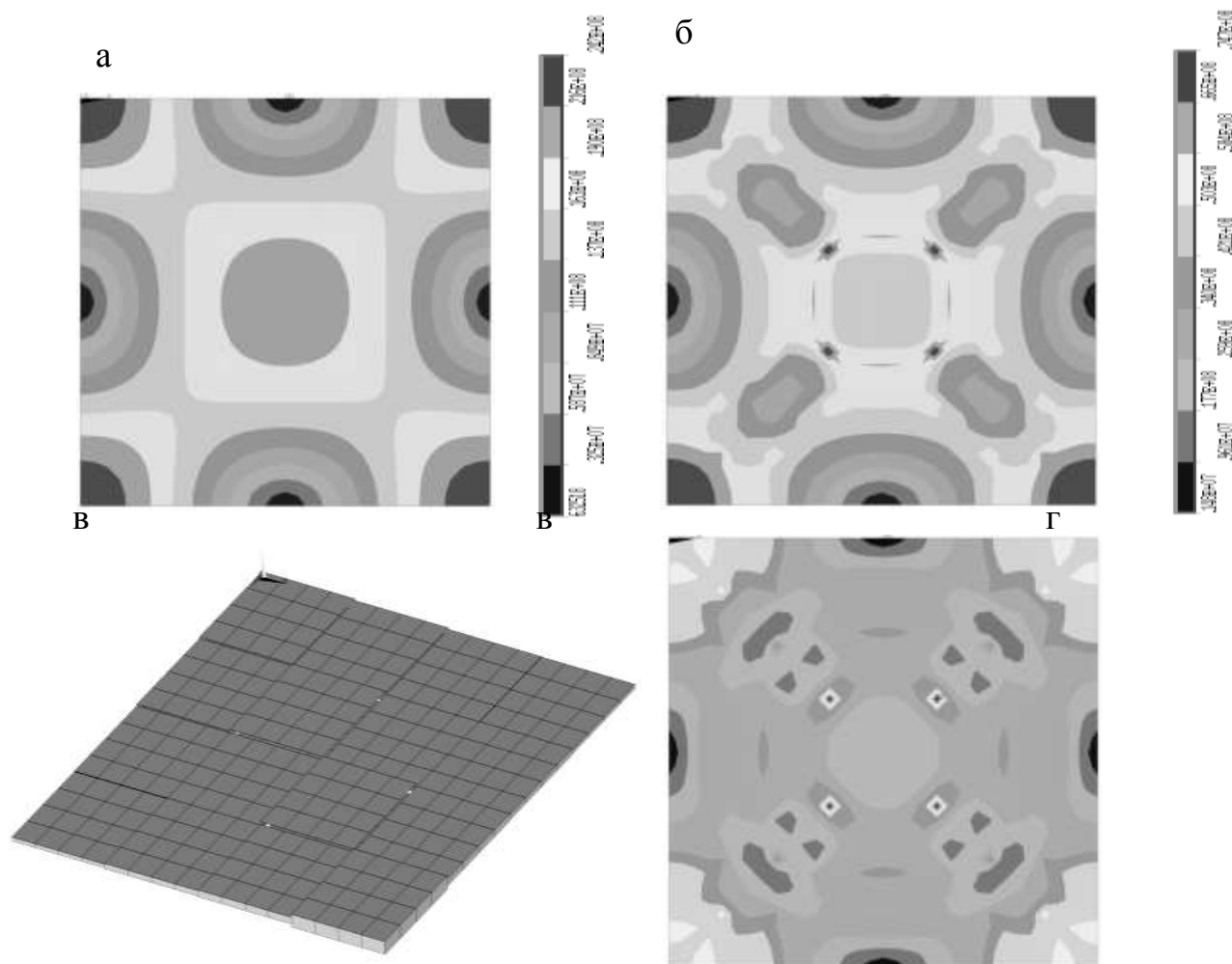


Рис. 3.53. Эквивалентные напряжения (Па): а- начального проекта плиты;

б - оптимального проекта плиты ступенчато-переменной толщины при ограничениях по эквивалентным напряжениям и прогибу

Величины толщин оптимального проекта плиты приведены в табл.3.10., а сама плита оптимального объема показана на рис. 3.53 в.

Объем оптимального проекта плиты ступенчато-переменной толщины равен $0,287 \text{ м}^3$, при начальном объеме $0,45 \text{ м}^3$. Таким образом, уменьшение объема материала плиты составило 36,3%.

Решим эту же задачу оптимизации при ограничении только по эквивалентным напряжениям $[\sigma] = 200 \text{ Мпа}$.

Решение получено за 6 итераций метода первого порядка. При этом максимальный прогиб в плите равен 0,045 м, максимальное эквивалентное напряжение - 194 МПа. Эквивалентные напряжения показаны на рис. 3.53 г, величины параметров оптимизации приведены в табл.3.10.

Таблица 3.10

Зоны плиты	Величины толщин зон плиты (м)		
	Начальный проект	Оптимальный проект	
		Ограничения По $[\sigma]$ и $[y]$	Ограничения по $[\sigma]$
1	0,05	0,0398	0,0309
2	-	0,0295	0,0171
3	-	0,0396	0,0296
4	-	0,0293	0,0136
5	-	0,0292	0,0127
6	-	0,0396	0,02798
7	-	0,0291	0,0100
8	-	0,0292	0,0119
9	-	0,0293	0,0194
10	-	0,0397	0,0272

Объем оптимального проекта плиты составил $0,160 \text{ м}^3$, при начальном объеме $0,45 \text{ м}^3$. Уменьшение материала плиты при ограничениях только по напряжениям составило 64,5%. При этом напряжения в плите увеличились и в ряде областей достигли величины задаваемых ограничений.

Пример 3. Сталежелезобетонная пространственная ферма покрытия (СЖФ 3x24 м) [3.15]. Верхний пояс состоит из унифицированных, соединенных между собой, железобетонных плит размером 3x6 м, толщиной 3 см, с контурными продольными ребрами 10x20 см, поперечными ребрами 10x17 см, ($E = 3,6 \cdot 10^4 \text{ МПа}$, $\mu = 0,2$), подкрепленных металлическими стержневыми элементами (уголок 125x8, $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\mu = 0,3$) высотой 1,5 м и соединенных между собой по длине плиты покрытия нижним поясом (уголок 180x11) в пространственный шпренгель (рис. 3.9). Нагрузка равномерно распределенная $q = 0,054 \text{ МПа}$.



Рис. 3.54. Общий вид сталежелезобетонной пространственной фермы

Исходный вариант пространственной фермы покрытия, является хорошо проработанной и достаточной по прочности и жесткости типовой конструкцией. Была поставлена задача возможного ее улучшения, путем решения оптимизационной задачи.

Оптимизационная задача сформулирована как задача минимизации объема конструкции при выполнении ограничений по прочности (эквивалентным напряжениям), жесткости (по прогибам) и ограничений на величины параметров проектирования. Для аппроксимации железобетонных плит использовался тонкий, 4-х узловой оболочечный элемент SHELL63. Пространственный металлический шпренгель моделировался стержневыми элементами LINK8.

В качестве параметров проектирования были приняты: толщины трех характерных зон, выделенных в унифицированном элементе (центральная часть плиты 3×6 м с толщиной ТС, боковая и угловая, с толщинами ТВ и ТУ), высота TR продольных ребер, ширина продольных и поперечных ребер BPR и BCR, соответственно, (в торцевых плитах - толщины зон ТК, вдоль опор и ширина опорных ребер BKR), а также площади поперечных сечений раскосов AR и нижнего пояса ANP шпренгеля (рис. 3.56 а).

Оптимальный проект 1. Параметров оптимизации - 4 (высота и ширина продольных ребер плиты – TR и TPR и площади поперечных сечений элементов шпренгеля - AR, ANP), ограничений - 3 (по максимальному прогибу – 0,06 м ($f/l \leq 1/300$), максимальным эквивалентным напряжениям в плите – 17 Мпа, в элементах шпренгеля - 210 МПа).

Оптимальный проект 2. Параметров оптимизации - 10 (ТС, ТВ, ТУ, ТК, TR, BPR, BCR, BKR, AR, ANP), ограничения те же, что и в предыдущем проекте.

Оптимальный проект 3. Параметров оптимизации -8 (ТС, ТВ, ТУ, ТК, TR, BPR, BCR, BKR), ограничений - 3 - по максимальному прогибу и максимальным напряжениям в плите и элементах шпренгеля.

Оптимальный проект 4. Параметров оптимизации - 10 (ТС, ТВ, ТУ, ТК, TR, BPR, BCR, BKR, AR, ANP), ограничения те же, что и в предыдущих проектах.

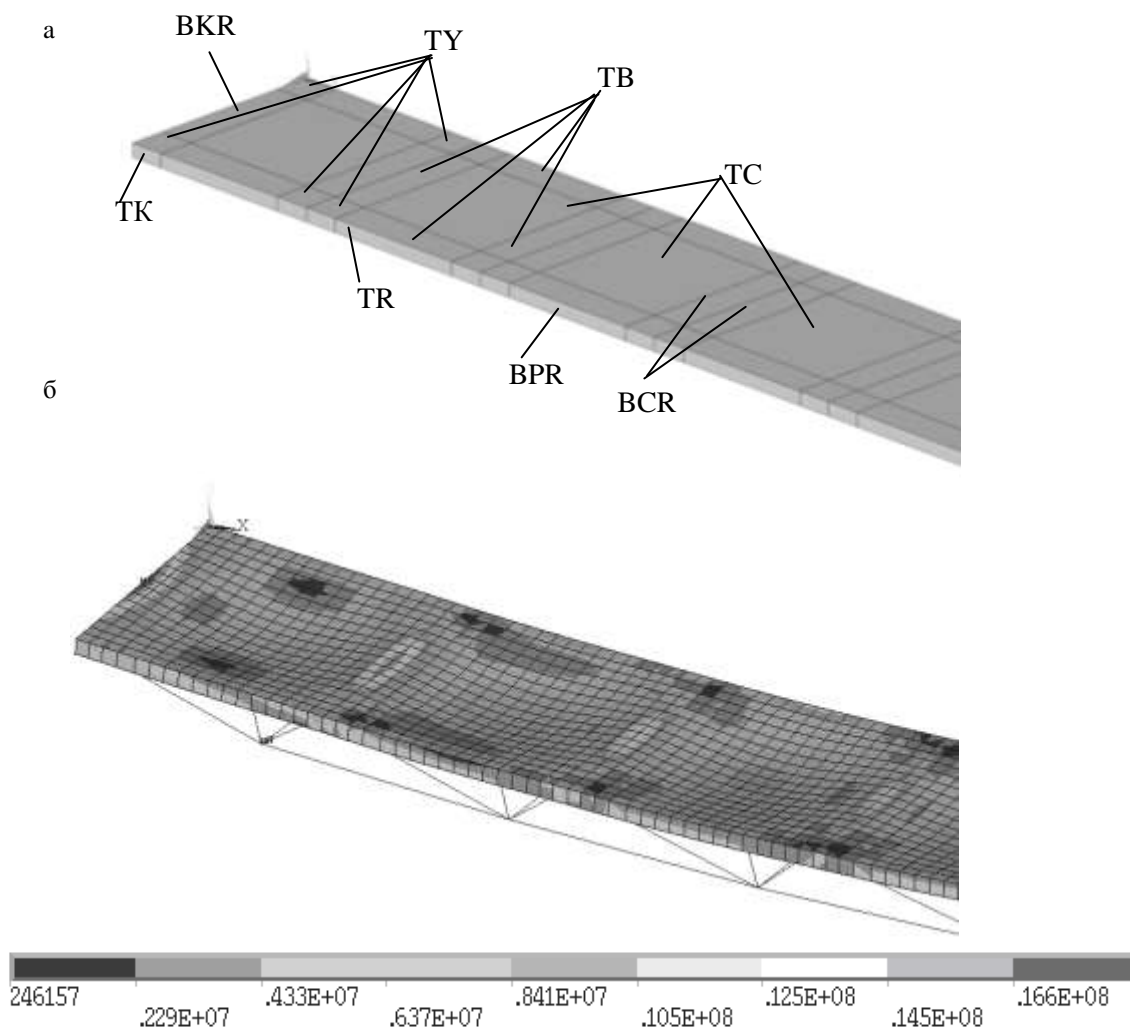


Рис. 3.55. Фрагмент сталежелезобетонной пространственной фермы
а – характерные зоны плиты для назначения параметров проектирования;
б – сетка конечных элементов и эквивалентные напряжения в верхнем поясе фермы (проект.3)

Таблица 3.11

Параметры проектирования	Результаты расчета				
	Начальный	Оптимальные проекты			
		1	2	3	4
ТС (м)	0,03	0,03	0,034	0,03	0,036
ТВ(м)	0,03	0,03	0,04	0,035	0,035
ТУ(м)	0,03	0,03	0,03	0,0385	0,048
ТК(м)	0,03	0,15	0,03	0,05	0,046
TR(м)	0,2	0,18	0,18	0,141	0,115
BPR(м)	0,1	0,1	0,09	0,084	0,058
BKR(м)	0,2	0,2	0,2	0,116	0,23
BCR(м)	0,1	0,1	0,102	0,146	0,106
AR(м ²)	0,00197	0,0027	0,0034	0,0019	0,0019
ANP(м ²)	0,00388	0,0039	3 0,0058 8	7 0,0038 8	0,0053
Объем (м³)	3,904	3,84	3,74	3,69	3,75
Ограничения по $\sigma_{\text{экв.}}^{\text{max.}}$ (МПа) в плите шпренгеле	- - -	17 210	17 210	17 210	17 210
Ограничение по y_{max} (м)		0,06	0,06	0,06	0,06
$\sigma_{\text{экв.}}^{\text{max.}}$ (МПа) в плите шпренгеле	13,6 186	13,6 208	16,5 200	16,8 201	17,2 202
y_{max} (м)	0,0538	0,0583	0,0486	0,059	0,052

Полученные результаты (табл.3.11) показывают, что “лучшим” из всех оптимальных проектов является проект.3. (распределение эквивалентных напряжений данного проекта показано на рис. 3.56 б). При этом максимальное уменьшение объема конструкции составило 5,5%, по сравнению с начальным проектом.

Однако практическое осуществление такого варианта, где точность толщины определяется миллиметрами, нетехнологична и нереальна.

Из этого следует, что при соблюдении технологических ограничений - 3 см на толщину плиты, добиться существенных улучшений проекта плиты

покрытия не удалось, что говорит о хорошей проработанности рассматриваемой конструкции с ее практической оптимизацией [3.15].

Приведенные примеры показывают, что расчетный комплекс ANSYS является эффективным инструментом в руках проектировщика-исследователя для решения задач оптимизации и создания рациональных конструкций в сочетании с его способностями владеть инженерным искусством и осмыслением решаемых оптимизационных задач.

Следует учитывать, что эффективность решения задачи оптимального проектирования конструкций во многом зависит от постановки задачи. Сложность постановки задачи оптимизации состоит в том, что необходимо заранее выбрать ту или иную форму и структуру конструкции, которая наиболее эффективно воспринимает действующую на нее нагрузку, определить функцию цели и ограничения задачи. Это является привходящими данными для компьютерной реализации. Если эти данные были выбраны неудачно, то будет решаться задача оптимизационная по сути, но ущербная в смысле неудачной постановки. Изменяя при этом структуру конструкции и наложенные на нее ограничения, можно получать более эффективные оптимальные решения.

3.4. Вычислительные модели в компьютерном проектировании. Метод конечных элементов

А бывают бесконечные элементы???

3.4.1. Общие положения. Создав математический анализ как общую модель сплошных сред и непрерывных процессов и его основной метод – линейное приближение к непрерывным функциям на малых участках (см. п. 2.3), Ньютон применял его непосредственно для составления систем уравнений и выполнения расчетов. В связи с этим он, например, строил таблицы *конечных разностей* и *разделенных разностей*. Наряду с этим для изучения свойств моделей и расчета разрабатывался и использовался *анализ бесконечно малых*, т.е. *аналитическое* исследование предельных свойств этих уравнений при уменьшении размеров участков. Однако в последующем развивалось главным образом аналитическое направление: без компьютеров решение больших систем уравнений было слишком трудоемкой задачей.

В расчетах конструкций в 19 – 20 веках тоже редко обращались к основному методу анализа. Большое внимание уделялось расчетам статически определимых конструкций и их использованию для раскрытия статической

неопределимости. При этом залогом успеха был выбор последовательности выгодных условий равновесия, таких что уравнения получались простыми, независимыми и легко решались.

С появлением ЭВМ – основной метод анализа вновь занял свое прочное место в моделировании и расчетах конструкций. Сложилась и широко используются две его основных формы: метод конечных разностей (МКР), идущий от Ньютона, и метод конечных элементов (МКЭ), основной момент в развитии которого связывают с идеей Р.Куранта [1] об использовании метода Галеркина с локальными координатными функциями.

Большинство современных универсальных программных комплексов для моделирования и расчета сплошных сред основано на МКЭ, который имеет два больших достоинства. Первое: локальные координатные функции можно строить на основе **триангуляции** расчетной области, т.е. разбиения ее на простейшие фигуры – треугольники или тетраэдры, на которых получаются простые и согласованные представления функций многочленами. И второе: метод Галеркина (как развитие принципа возможных перемещений) дает наиболее экономичным путем согласованные системы уравнений с учетом геометрических связей и условий непрерывности. Принципы построения и технику реализации МКЭ поясним на простых примерах.

3.4.2. Простые примеры. Одномерные конструкции

А. Продольное деформирование стержня (рис. 2, а). Применение основного метода анализа. При закрепленных концах эта задача статически неопределима (по вертикали одна степень свободы и две связи). Аналитическое решение здесь существует, но оно трудоемкое и не универсальное.

Следуя основному методу математического анализа, разделим конструкцию на n малых частей и будем искать перемещения u_i в $(n+1)$ точках (рис. 3,56, б). Деформации (относительные удлинения ε) на каждом участке выразим через перемещения концов участка на основе простейшего линейного

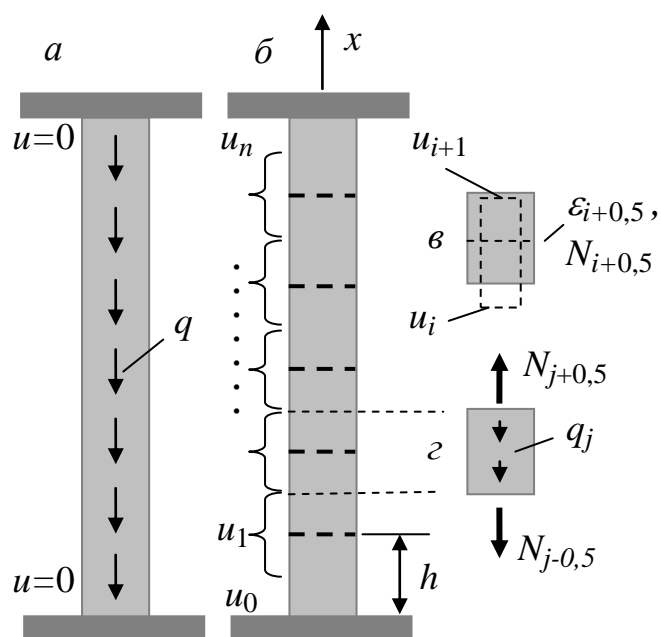


Рис. 3.56

представления зависимости $u(x)$ и получим отсюда

$$\varepsilon_{i+0,5} = (u_{i+1} - u_i)/h \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.14)$$

Значения производных в (3.14) лучше отнести к точкам $i+0,5$ в центрах интервалов $[i, i+1]$: это *точки сверхсходимости* простейшей формулы численного дифференцирования (3) (см. раздел 3.5). В этих же точках получим значения продольных сил

$$N_{i+0,5} = EA\varepsilon_{i+0,5} \quad (i = 0, 1, \dots, n-1), \quad (3.14)$$

настолько же высокоточные, как и $\varepsilon_{i+0,5}$: их погрешность при сгущении сетки также будет убывать со скоростью $O(h^2)$. Эти внутренние силы используем для составления уравнений равновесия участков балки между сечениями $(i-0,5)$, $(i+0,5)$ – окрестностей точек $1, 2, \dots, n-1$ с неизвестными (варьируемыми, незакрепленными) перемещениями узлов:

$$N_{i+0,5} - N_{i-0,5} + qh = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (3.16)$$

В (3.16) отсутствуют уравнения равновесия для нулевого и n -го участков стержня, которые прикреплены к опорам. Они не необходимы в системе (3 – 5), в которой столько уравнений равновесия, сколько степеней свободы. Обычно уравнения равновесия закрепленных участков составляют и используют после решения системы (3.14 – 3.16) для определения неизвестных реакций опор. В уравнениях (3.14 – 3.16) ровно столько уравнений (геометрических, физических и статических), сколько мы назначили для приближенного расчета неизвестных значений искомых функций. Выразив N через ε , а ε через u с помощью (3.15), (3.14), получим разрешающие уравнения в перемещениях ($n-1$ уравнений с $n-1$ неизвестными).

$$\begin{aligned} \frac{EA}{h}(u_2 - 2u_1 + u_0) + qh = 0, \quad \frac{EA}{h}(u_3 - 2u_2 + u_1) + qh = 0, \dots \\ \frac{EA}{h}(u_n - 2u_{n-1} + u_{n-2}) + qh = 0, \text{ где } u_0 = 0 \text{ и } u_n = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Уравнения (3.14) – (3.17) – это *дифференциальные уравнения*, т.е. полученные путем дифференцирования – разделения объекта исследования на малые части. В анализе бесконечно малых их записывают в сокращенном виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x) = u'(x); \quad N(x) = EA\varepsilon(x); \quad N'(x) + q(x) = 0; \quad (EA(x)u'(x))' + q(x) = 0, \\ u(0) = 0, u(l) = 0, \text{ где } l = 6 \text{ м}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Между (3.14) – (3.17) и (3.18) нет взаимно-однозначного соответствия. Например, в (3.14) и (3.16) можно было использовать принятые в анализе бес-

конечно малых несимметричные (нецентральные) формулы для определения геометрических и статических зависимостей между основными понятиями модели. Точность при этом уменьшается, но при измельчении разбиения расчетной области приходим к одному и тому же пределу. С точки зрения анализа бесконечно малых все конечные представители бесконечномерной модели равноценны, если имеют один и тот же предел. Так что уравнения (3.18) не равноценны (3.14) – (3.17), в них отброшена часть информации, несущественная для общих рассуждений, но важная для точности и надежности конкретных вычислений. С точки зрения практического расчета стремятся минимизировать погрешности конечных представителей моделирования: это повышает точность и надежность расчета, достоверность и полезность получаемой из модели информации.

Упражнение 1. Измените систему уравнений (3.14) – (3.17) и (3.18) для случая, когда один или оба конца стержня не закреплены и для случая, когда концы смещены на заданные расстояния.

Упражнение 2. Определите перемещения и напряжения в стержнях переменного сечения (рис. 3.57) от собственного веса. Размеры, зависимость размеров сечения от высоты и свойства материала назначьте сами.

Таким образом, основной метод анализа, который еще Ньютон использовал в расчетах, – это непосредственное построение конечномерной модели с учетом всех особенностей объекта и использование ее для получения информации об этом объекте. Его называют также **метод конечных разностей**, противопоставляя бесконечно малым разностям в анализе бесконечно малых.

Конечно, для проверки и обеспечения надежности получаемые конечноразностные уравнения сравнивают с предельными (дифференциальными) уравнениями.

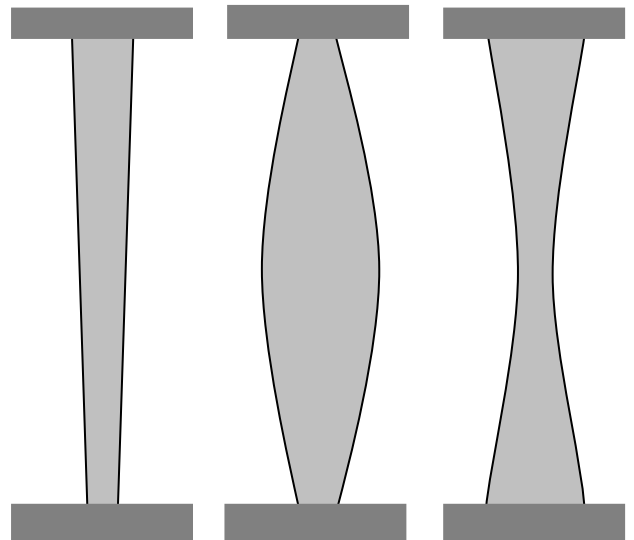


Рис. 3.57

В строительной механике другие КЭ. Так как есть аналитическое решение, его и используют. Делят на части, не обязательно малые. Это нельзя распространить на 2-, 3-мерные задачи.

\square – \square распространяется. Но плохо применимо к треугольным сеткам, а для сложных областей с четырехугольными не получается.

Но более популярно (захватили рынок) другой путь.

Б. Продольное деформирование стержня. Метод конечных элементов – проекционный подход. Матрица жесткости конечноэлементной модели.

В 20 веке, на фоне накопленных в анализе бесконечно малых огромных объемов знаний о свойствах бесконечномерных моделей редко используют непосредственное формирование конечномерных представителей этих моделей, а стремятся использовать эти уже известные свойства. Если вы заметили, в вышеизложенном построении системы уравнений использовано обоснованное ранее свойство повышенной точности – сверхсходимости – точек в центрах интервалов. В частности

Например, еще в 1908 г. Б.Г.Галеркин распространил на бесконечномерные модели проекционный подход к составлению и решению уравнений, который Ж.-Л.Лагранж использовал на сто лет раньше в конечномерных задачах под названием «Принцип возможных перемещений». Метод Галеркина относится к методам получения аналитических решений дифференциальных уравнений, т.е. к отысканию приближенных (а иногда и точных) решений $u(x)$ в виде комбинаций известных, изученных функций $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$, принимаемых за координатные элементы функционального пространства:

$$u(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \dots + a_n\varphi_n(x). \quad (3.19)$$

Для точного решения необходимо (абстрактно) бесконечное множество слагаемых, в реальных же расчетах ограничиваются конечной суммой (3.19), подбирая в качестве координатных элементов наиболее значимые функции для данного набора задач. Дифференциальное уравнение – это сокращенная запись бесконечного набора уравнений, его нельзя выполнить за счет n слагаемых (8). В качестве n наиболее значимых уравнений Б.Г.Галеркин предложил использовать *проекции* дифференциального уравнения на *те же* (наиболее значимые) координатные направления, через которые выражена искомая функция $u(x)$. Проекцию $Eau''(x)+q(x)$ на направление другой функции $\varphi(x)$ определяют как скалярное произведение, выражаемое через интеграл (2). В реальных расчетах выяснилось, что хорошие результаты получают-

ся, когда координатные функции удовлетворяют граничным условиям, а для областей сложной формы этого трудно добиться, и эффективность оказалась меньше ожидавшейся. Вторая трудность в том, что в сложных случаях получается большая система линейных алгебраических уравнений, все коэффициенты которой ненулевые. Тем не менее были решены многие сложные задачи.

А в 1943 г. Р.Курант опубликовал статью [1], в которой основным методом анализа (поточечное приближенное представление функций конечным набором значений) объединял с проекционным подходом Галеркина, предложив использовать для этого *локальные координатные функции*, каждая из которых равна нулю всюду, кроме окрестности одной точки (узла конечноэлементной сетки). В силу локальности такими функциями легко представлять любые комбинации нагрузок и закреплений в любой точке расчетной области.

Для задания координатных функций используют самые простые – линейные, квадратичные и редко кубичные многочлены. К ним применяют проекционный метод Галеркина и получают систему уравнений с сильно *разреженной* матрицей (с редко расположенными ненулевыми элементами), в силу локальности координатных функций. Такие матрицы называют также *слабозаполненными*.

Исследователей не удовлетворяла как техника использования МКР, представлявшаяся недостаточно универсальной, особенно для объектов сложной формы, так и отсутствие простого и надежного обоснования сходимости последовательности сеточных решений к предельной функции – точному аналитическому решению дифференциального уравнения. Поэтому новый подход завоевал огромную популярность и получил очень широкое распространение в различных областях.

Здесь при расчете исходят из аналитического представления задачи – в виде дифференциальных уравнений, полученных путем анализа бесконечно малых. Обычно решают уравнения метода перемещений, т.е. дифференциальные уравнения равновесия (3.18).

В таком случае опираются на принцип возможных перемещений, в соответствии с которым для представления всего поля перемещений выбирают координатные функции, совместимые с геометрическими связями. Геометрические связи – это опорные связи и неразрывность упругих элементов, которая обеспечивается использованием непрерывных координатных функций.

По методу Галеркина (или, что то же самое, по принципу возможных перемещений) для получения конечного числа уравнений проектируют дифференциальное уравнение равновесия (оно содержит все внутренние и внешние силы) на направления возможных перемещений, задаваемые этими же координатными функциями.

Проектирование вектора обобщенных сил на направления возможных перемещений позволяет упростить составление уравнений равновесия и уменьшить их количество. Размер системы уравнений уменьшается, так как нет необходимости реакции в опорных связях.

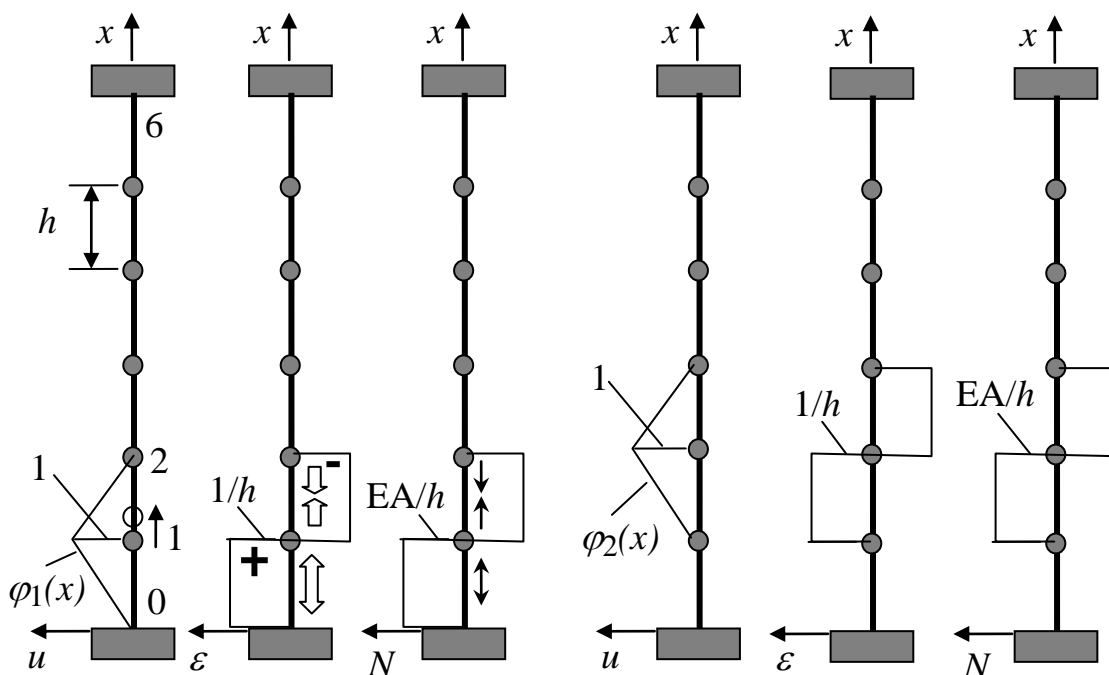


Рис. 3.58. Характерные для МКЭ единичные координатные функции перемещений и соответствующие им функции деформаций и

Для выбранного нами примера продольного деформирования стержня (рис. 3.58) исходим из того, что анализ бесконечно малых провели, геометрические, статические и физические зависимости для малых частей имеем:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = q_x, \quad N = EA\varepsilon.$$

Разделим рассчитываемый стержень по длине на n частей – конечных элементов (для простоты возьмем равные части, на рис. 4 $n = 6$). Точки на границах между элементами называют

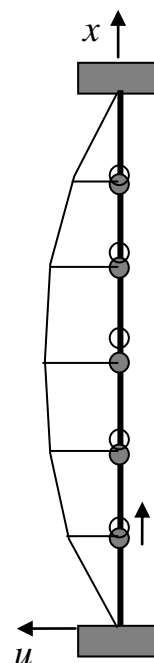


Рис. 3.59

узлами. Перемещения u_0, u_6 закреплены (невозможны). В остальных узлах будем искать неизвестные перемещения $u_1 - u_i$, представляя u между узлами линейными функциями, так что весь график перемещений – ломаная линия (рис. 3.59).

Эту ломаную линию представим суммой единичных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (рис. 3.58), которые примем за координатные элементы, с неизвестными коэффициентами u_i :

$$u(x) = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + \dots + u_{n-1}\varphi_{n-1}. \quad (\text{A})$$

Заметим, что каждая из φ_i определена на всей длине стержня: равна нулю везде, кроме окрестности узла i .

Вычислим внутренние силы, соответствующие перемещениям (A), в конечных элементах:

$$[0,1] \quad N_1 = (u_1 - u_0)EA/h; \quad [1,2] \quad N_2 = (u_2 - u_1)EA/h; \quad [2,3] \quad N_3 = (u_3 - u_2)EA/h; \quad \dots;$$

$$[n-1,n] \quad N_n = (u_n - u_{n-1})EA/h. \quad (\text{B})$$

Внутренние силы работают на разностях перемещений концов участков.

Если силы N_1, N_2, \dots, N_n находятся в состоянии равновесия с внешней нагрузкой q , то сумма работ этих сил на каждом из возможных перемещений $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (рис. 3.58) равна нулю:

$$\varphi_1 : N_2 - N_1 + qh = 0; \quad \varphi_2 : N_3 - N_2 + qh = 0; \quad \dots, \quad \varphi_{n-1} : N_n - N_{n-1} + qh = 0 \quad (\text{B})$$

Подставив (B), получим уравнения в перемещениях:

$$\frac{EA}{h}(u_2 - 2u_1 + 0) + qh = 0, \quad \frac{EA}{h}(u_3 - 2u_2 + u_1) + qh = 0, \dots \quad (\text{Г})$$

Получили такие же уравнения, как МКР.

Опасное заблуждение. Проявляется в кривых конструкциях, в 2- и 3-мерных задачах.

Упражнение 2. Рассчитайте перемещения, деформации и напряжения в колоннах переменного сечения (рис. 3.57) под действием собственного веса. Размеры, зависимость размеров сечения от высоты и свойства материала назначьте сами.

Коэффициенты уравнений (Г) представляют собой *матрицу жесткости конечноэлементной модели*. Из чего она состоит? – Из проекций поля внутренних сил, возникающих при деформировании по единичной форме i , на каждую возможную единичную форму деформирования j (см. рис. 3.58).

Проектирование на координатные направления хорошо помогает и при сверхсходимости (не заботясь о точном выполнении непрерывности).

Проектирование связано с работой и энергией. Хороший путь – минимум энергии (там где она есть).

Поэтому подход изменялся и совершенствовался. Сейчас наиболее популярны гибридные элементы. Но лучше подробности об этом узнать на более представительных 2-мерных задачах.

В. Продольное деформирование стержня. Вариационный подход.

Энергия деформирования и энергия поля тяготения – потенциальные.

Работа растягивающей или сжимающей силы N , деформирующей упругий стержень, переходит в потенциальную энергию \mathcal{E} . С учетом того, что сила зависит от относительного удлинения ε и жесткости EA , для постоянного сечения

$$\mathcal{E}_\varepsilon = \int_0^\varepsilon EA\varepsilon \cdot l d\varepsilon = \frac{EA l \varepsilon^2}{2} = \frac{EA u^2}{2l},$$

а на единицу длины стержня (удельная энергия деформирования).

$$\varepsilon_\varepsilon = EA\varepsilon^2 / 2$$

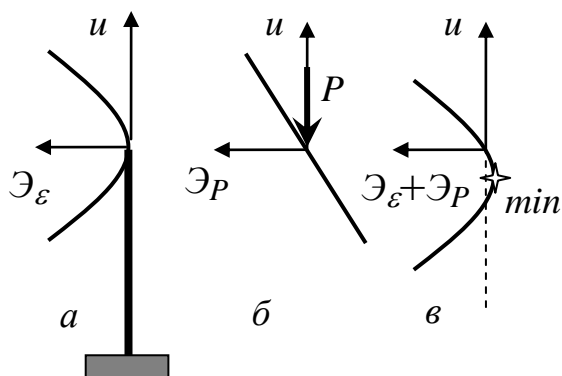


Рис. 3.60. Потенциальная энергия деформирования (а), силы тяжести (б) и полная (в). Точка минимума полной потенциальной энергии соответствует состоянию равновесия.

И растянутый, и сжатый стержень имеет положительную энергию упругого деформирования, которая при движении к недеформированному состоянию совершает положительную работу, уменьшаясь при этом. Она достигает минимума при $\varepsilon = 0$ (рис. 3.60, а). Так что потенциальная энергия деформирования – это такая величина, производная которой по перемещению равна силе. Или, что то же самое, производная от удельной энергии деформирования по относительному удлинению равна силе:

$$N = \frac{d\varepsilon_\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{\partial \mathcal{E}_\varepsilon}{\partial u}.$$

При поднятии груза весом P на высоту u поднимающая сила постоянна, она совершает работу Pu , так что так что груз увеличивает свою потенциальную энергию; при опускании – уменьшает; в системе отсчета (рис. 3.60, б)

$$\mathcal{E}_p = -Pu .$$

Полная потенциальная энергия упругого стержня с грузом (рис. 3.60, в) имеет минимум при смещении точки приложения силы вниз. Это – состояние равновесия (*устойчивого*), так как для отклонения от него нужно совершить положительную работу по увеличению энергии. В этом состоянии производная от полной потенциальной энергии

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial u} = N - P = 0, \text{ так как } \frac{\partial \mathcal{E}_\varepsilon}{\partial u} = N, \text{ а } \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial u} = -P .$$

При растяжении и сжатии стержня его жесткость EA/l положительна: при смещении узла от нейтрального положения возникает реакция, противодействующая смещению.

Жесткость упругой системы определяет свойства ее потенциальной энергии деформирования и положении точки минимума полной потенциальной энергии при нагружении. **Она зависит от напряженно-деформированного состояния (НДС).** Характерный пример: изгибная жесткость стержня увеличивается при растяжении. Тонкая струна практически не сопротивляется изгибу, растянутая – выдерживает большие нагрузки, вибрирует с высокими собственными частотами. При сжатии изгибная жесткость стержня уменьшается, становясь нулевой и, далее, отрицательной. При этом изменяются свойства энергии деформирования: она становится невыпуклой функцией поля перемещений, и соответствующее состояние равновесия становится неустойчивым: при отклонении от него потенциальная энергия может уменьшаться, совершая работу – что она и делает, переводя конструкцию в другое НДС, чаще всего разрушенное.

Значение $N = N_{кр}$, при котором жесткость становится нулевой, называют критической силой; это – момент потери устойчивости. При $N > N_{кр}$ жесткость отрицательна – это признак неустойчивости состояния равновесия: при малейшем отклонении от прямолинейной формы в стержне появляется изгибающий момент, не противодействующий изгибу, а увеличивающий его.

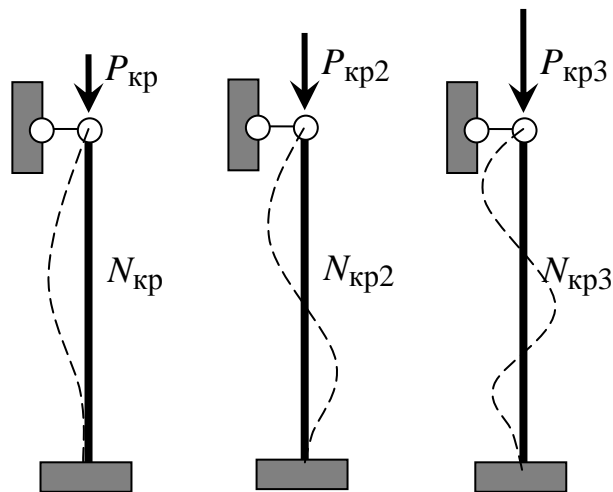


Рис. 3.61. Критические НДС – первые три формы потери устойчивости стержня

Здесь нужно иметь в виду, что стержень – упругая система с бесконечным числом степеней свободы, и его матрица жесткости бесконечномерна. Первое критическое значение N – то, при котором стал нулевым один из ее главных коэффициентов: стала нулевой и далее отрицательной жесткость изгиба в одном из направлений, называемых формой потери устойчивости. При увеличении сжимающей силы становится отрицательной жесткость еще в одном направлении деформирования, это – вторая критическая сила $N_{кр2}$ и вторая форма потери устойчивости. И т.д. (рис. 3.61). Выбирайте сами, на какую из критических сил вы будете ориентироваться при проектировании.

Обычно значение внешней нагрузки $P_{кр}$ называют критической силой. Однако устойчивость или неустойчивость равновесия связана скорее с внутренним состоянием системы. Кроме того, внешняя нагрузка может быть распределенной, а внутренние силы переменными вдоль стержня. Правильнее говорить о критическом НДС, т.е. таком состоянии, при котором жесткость системы при движении в каком-либо направлении становится равной нулю.

Обычную линейную модель твердого деформируемого тела в теории упругости и строительной механике получают, линеаризуя все зависимости в окрестности нулевого НДС. Такие линейные уравнения не могут отражать изменение жесткости при нагружении; эта информация содержится только в геометрически нелинейных (и в физически нелинейных) уравнениях. Ее получают, после выполнения нелинейного (в простейших случаях со сжатыми стержнями достаточно линейного) первоначального расчета из линеаризованных уравнения в окрестности полученного ненулевого НДС. Обычная практика – последовательное нагружение конструкции и анализ на каждом этапе положительной определенности ее матрицы жесткости. Относительно легко обнаруживается появление нулевого собственного значения матрицы:

это и есть индикатор критического НДС и, значит, критического параметра нагрузки.

В программах нелинейного расчета конструкций должно быть предусмотрено слежение за изменением основного свойства положительной определенности матрицы жесткости и (более обще) выпуклости потенциальной энергии системы. Однако в них, как правило, не предусмотрено отображение этой информации, и приходится ее находить по косвенным признакам. Алгоритмы решения линеаризованной системы уравнений обычно таковы, что она не решается при отсутствии свойства положительной определенности у матрицы жесткости. За момент потери устойчивости берут ту нагрузку, при которой программа сообщает об ошибке при решении системы уравнений равновесия (деление на нуль, переполнение разрядной сетки ячейки памяти или извлечение корня из отрицательного числа). В настоящее время это следует считать большой недоработкой расчетной программы: существуют простые и надежные методы [Деруга] уточненного определения критической нагрузки и послекритических форм равновесия, основанные на свойствах выпуклости потенциальной энергии системы.

Г. Техника реализации. Матрицы жесткости конечных элементов и сборка матрицы жесткости конструкции.

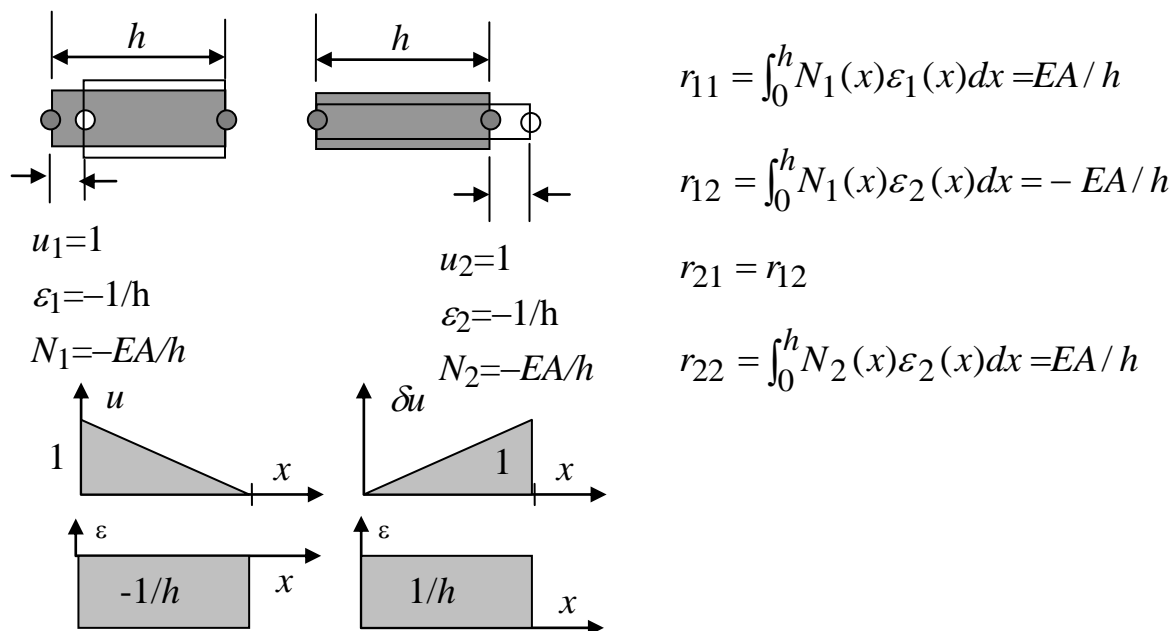


Рис. 3.62. Вычисление матрицы жесткости r конечного элемента на примере продольно деформируемого стержня. Каждый коэффициент r_{ij} определяется двумя полями единичных перемещений: от которого внутренние силы (u) и тестирующее (δu)

Матрица жесткости элемента. Задаем единичное перемещение $u_1=1$ начала (левого конца) конечного элемента, $u_2=0$ на правом конце и линейное распределение по длине. Вычисляем деформации ε и соответствующие внутренние силы N во всех его точках по длине. Внешних сил здесь нет. Жесткостью коэффициент r_{11} – это проекция вектора внутренних сил N (т.е. функции $N(x)$), вызванных этим смещением, на соответствующий вектор перемещений (в данном случае функцию $\varepsilon(x)$). Проекцию определяют как скалярное произведение векторов. Для функций скалярное произведение определяют как интеграл (рис. 3.62).

Точно так же вычисляем r_{22} . Коэффициент жесткости r_{12} – это проекция вектора (функции – бесконечномерного вектора) внутренних сил N , вызванных смещением $u_2=1$, на направление соответствующих смещений $\varepsilon(x)$, соответствующих $u_1=1$.

Произведение силы на смещение называют работой. Коэффициент жесткости – какая это работа? – Это приращение работы на единичном смещении, т.е. *производная* от работы деформирования, или от энергии деформирования. Сама энергия деформирования вычисляется с учетом зависимости силы от перемещения и для r_{11} , r_{22} равна в линейном случае $N\varepsilon/2 = EA\varepsilon^2/2$.

Этими понятиями необходимо владеть для правильного использования МКЭ и основанных на нем программ.

Сборка матрицы жесткости конструкции. Единичное смещение узла конструкции совпадает (в данном простом случае) с единичными смещениями концов соседних элементов. Работа по деформированию конструкции складывается из работ по деформированию частей. Каждый коэффициент жесткости r_{ij} определяется двумя полями единичных перемещений: от которого внутренние силы и тестирующее, на которое эти силы проектировать (рис. 3.63 – 3.65). На рис. 3.63 – 3.65 стержень (рис. 3.58) повернут в горизонтальное положение: так нам легче, привычнее воспринимать графики функций. Напомним, что проекция внутренней силы $N_i(x)$ на соответствующее ей перемещение $\varepsilon_j(x)$ определяется как скалярное произведение функций

$$N_i \cdot \varepsilon_j = \int_0^l N_i(x) \varepsilon_j(x) dx.$$

Таким образом, элементы матрицы жесткости конструкции состоит из тех же интегралов, которые вычисляются при формировании матрицы жесткости одного конечного элемента. При реализации как вручную, так и на компьютере формирование глобальной матрицы жесткости конструкции M

разделяют на более простые операции: вычисление матриц жесткости конечных элементов R_i и «сборка» из них коэффициентов M .

Конечные элементы могут обрабатываться в своих локальных координатах, тогда при сборке их матрицы жесткости преобразуют к общей для всей конструкции глобальной системе координат.

Однако часто бывает удобно в различных узлах назначать разные направления координатных осей, приспособивая их к направлениям наложенных связей. Тогда при сборке матрицы жесткости элементов преобразуются к системам координат узлов, с учетом того, в какой узел конструкции попадает данный узел элемента.

В расчетных программах различают узлы и точки. Узел отличается тем, что может иметь связи и внешние воздействия (заданные смещения, нагрузки).

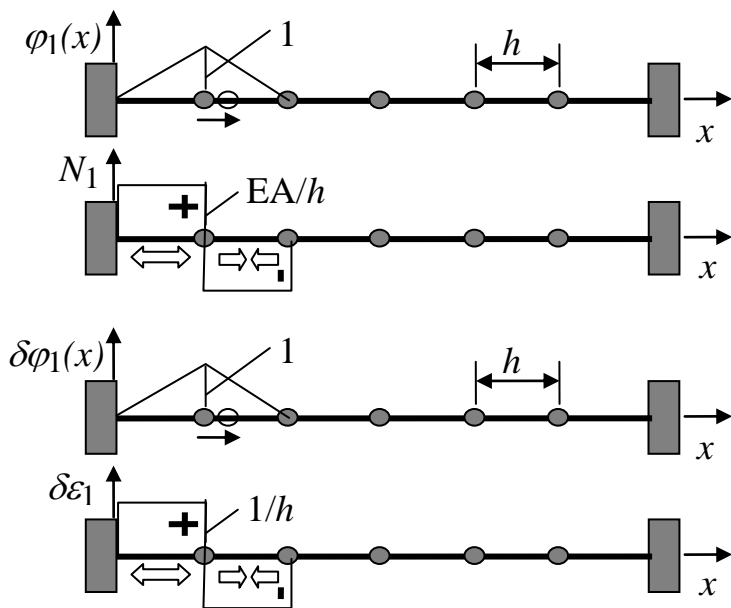


Рис. 3.63. Координатные функции для вычисления коэффициента жесткости r_{11} : φ_1 определяет внутренние силы N_1 , а $\delta\varphi_1$ – перемещения для проектирования $\delta\varepsilon_1$.

$$r_{11} = \frac{EA}{h} \cdot \frac{1}{h} \cdot h + \left(-\frac{EA}{h} \right) \cdot \left(-\frac{1}{h} \right) \cdot h = \frac{2EA}{h}$$

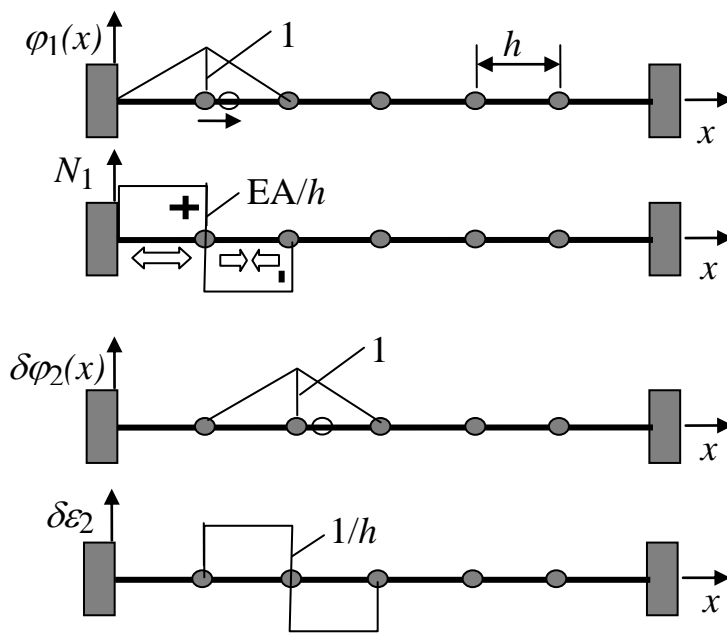


Рис. 3.64. Координатные функции для вычисления коэффициента жесткости r_{12} : φ_1 определяет внутренние силы N_1 , а $\delta\varphi_2$ – перемещения для проектирования $\delta\varepsilon_2$.

$$r_{12} = \left(-\frac{EA}{h} \right) \cdot \frac{1}{h} \cdot h = -EA/h$$

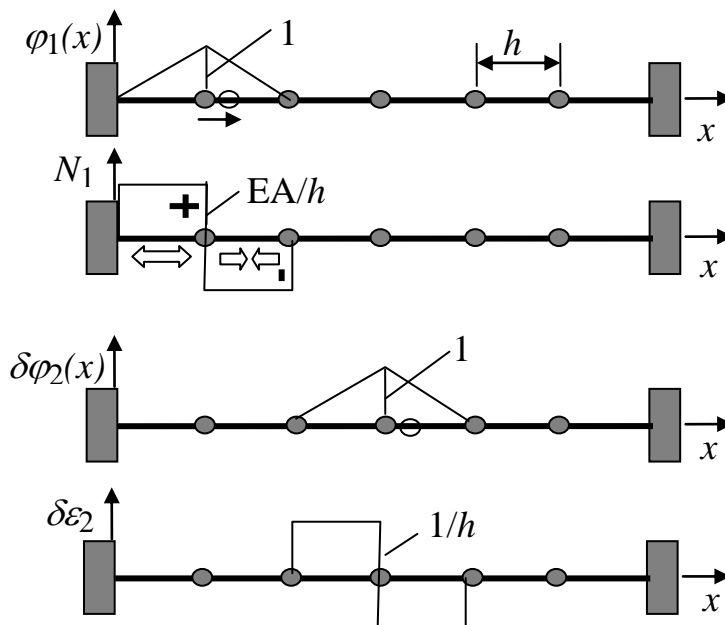


Рис. 3.65. Координатные функции для вычисления коэффициента жесткости r_{13} : φ_1 определяет внутренние силы N_1 , а $\delta\varphi_3$ – перемещения для проектирования $\delta\varepsilon_3$.

$r_{13} = 0$, так как ненулевые силы N_1 только на том участке, где соответствующие компоненты перемещений равны нулю

Упражнение. Вычислите матрицу жесткости конечноэлементной модели стержня переменного сечения (рис. 3.57, любого из трех) при разбиении его на $n = 6$ элементов.

3.4.3. Простые примеры. Двумерные конструкции

А. Треугольная сетка: линейные, квадратичные КЭ. Гибридные КЭ. Сверхсходимоссть в гибридных КЭ.

Необходимый минимум для решения дифференциальных уравнений – линейная аппроксимация на подобластях.

Для двумерных областей линейная аппроксимация имеет вид

$$u = a_1 + b_1x + c_1y, \quad v = a_2 + b_2x + c_2y. \quad (3.20)$$

Необходимый минимум из трех аппроксимационных коэффициентов a_1, b_1, c_1 обеспечивается значениями функции u в трех точках, поэтому для кусочно-линейных аппроксимаций на плоской области ее разбивают на треугольники (рис. 3.66).

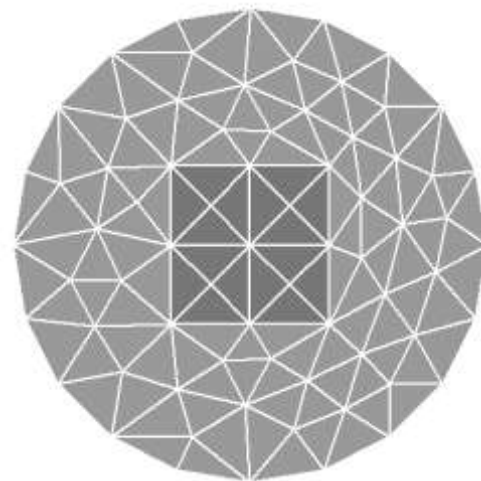


Рис. 3.66

Треугольник на плоскости, тетраэдр в трехмерном пространстве и, вообще, простейшие фигуры (симплексы) с $(n+1)$ вершинами в n -мерном пространстве наиболее универсальны для разбиения области как угодно сложной формы на малые части. И в то же время количество вершин у них точно соответствует количеству коэффициентов линейной функции (многочлена первой степени) в таком пространстве.

Кусочно-линейные координатные функции при этом имеют вид (рис. 3.67, а), а коэффициенты a_{ij} уравнений равновесия (элементы матрицы жесткости конструкции) в координатах $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$ при этом получают, вычисляя приращение (вариацию) энергии деформирования по схеме (рис. 3.67, б).

Технически реализацию этого разбивают на два этапа: вычисление матриц жесткости конечных элементов и сборка матрицы жесткости всей конструкции, т.е. вычисление ее коэффициентов a_{ij} по схеме (рис. 3.67, б), составляя их из соответствующие коэффициентов матриц жесткости элементов T_1 и T_2 .

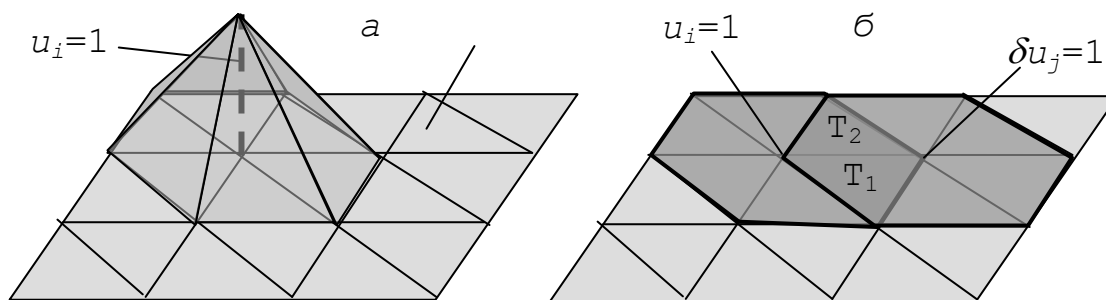


Рис. 3.68. Кусочно-линейная координатная функция на треугольной конечноэлементной сетке (а) и

Функции изменения формы конечного элемента, его матрица жесткости. Единичным перемещениям $u_1=1, v_1=1; u_2=1, v_2=1; u_3=1, v_3=1$ трех узлов конечного элемента соответствуют три координатные функции ψ_1, ψ_2, ψ_3 (рис. 9). Соответствующие деформации – постоянные функции

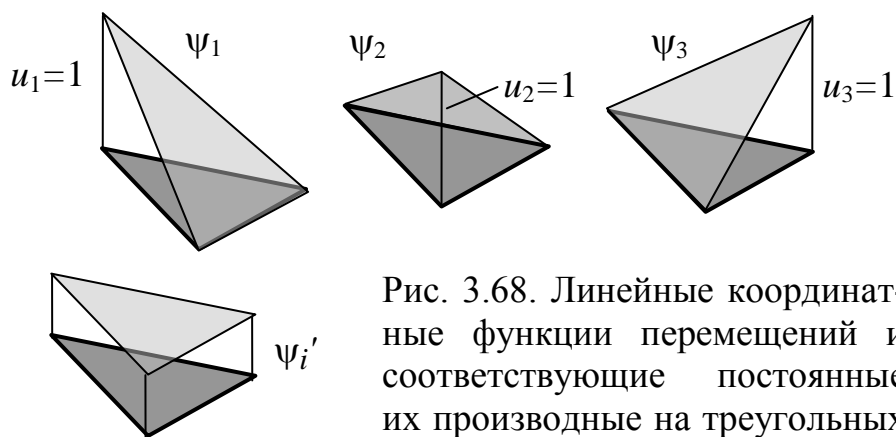


Рис. 3.68. Линейные координатные функции перемещений и соответствующие постоянные их производные на треугольных (трехузловых) КЭ

Координатные функции для проекционного метода. Сборка матрицы жесткости КЭ модели.

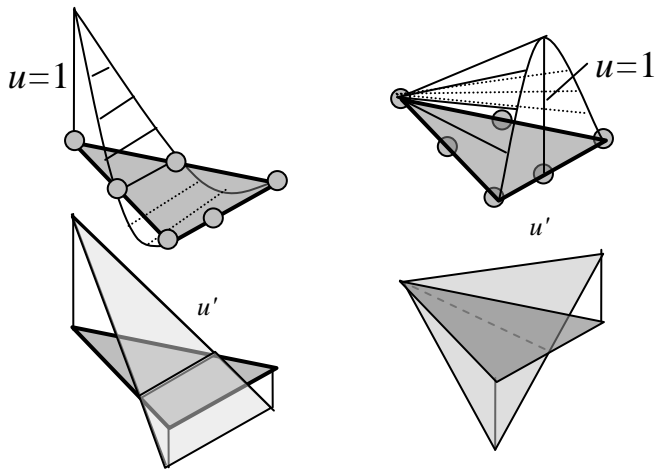


Рис. 3.69 Квадратичные координатные функции и соответствующие линейные их производные на треугольных шести-узловых КЭ

3.5.1 Состояние и перспективы развития численных методов

В этой главе изложены принципиальные понятия и положения вычислительного моделирования, на которых построены как «ручные», так и компьютерные методы расчета. Понимание этих принципов и представление о связанных с ними источниках и мерах погрешностей необходимо при моделировании и расчетах конструкций разного уровня сложности, особенно при использовании расчетных программных комплексов или при создании новых программ.

3.5.1. О математических моделях расчета конструкций.

Может кто-нибудь понять модель, не зная, что она моделирует?

Риторический вопрос. Однако (видимо, еще со времен Лагранжа) на первом курсе изучают высшую математику, чтобы потом применять ее в физике, механике и других дисциплинах. В результате почти все студенты не понимают математический анализ и даже не знают, что его основоположник – Исаак Ньютон. В своем выступлении при получении награды Ньютон сказал, что действительно достиг больших высот, и это потому, что стоял на плечах таких гигантов, как Архимед, Евклид, Декарт, Паскаль, Кеплер, Галилей и др. Было бы эффективнее не делить неразрывное, и, раз уж математика впереди, не выбрасывать из нее главное – смысл изучаемых моделей.

Математический анализ, т.е. дифференциальное и интегральное исчисление, придуман как модель непрерывных процессов – движения и как модель сплошных сред. Строители чаще имеют дело с равновесием, чем с движением, а со сплошными средами – постоянно.

К сплошным средам относятся жидкости, газы (водо- и теплоснабжение, вентиляция) и твердые деформируемые тела (т.е. элементы конструкций). Согласно математической модели, среда состоит из бесконечного набора точек, так что между любыми двумя точками есть еще точки. Она не отражает молекулярное строение вещества, зато удобна и достаточно точна: молекулярная модель не поместится ни в какой компьютер, современный или будущий. С помощью систем координат (следуя Р.Декарту) точки на прямой моделируются действительными числами, на плоскости – парами, в пространстве – тройками чисел, которые называют векторами.

Модели сплошных сред – бесконечномерные. Свойства и поведение сред (в том числе элементов конструкций) описывают геометрическими, статическими (или динамическими) и физическими понятиями и уравнениями.

3.5.2. Бесконечномерность – основная характеристика дифференциальных, интегральных и других функциональных уравнений

Математические модели и соответствующие им задачи можно условно разделить на две большие группы: конечномерные (с n неизвестными) и бесконечномерные.

К первой относится линейная алгебра и ее задачи (решение систем линейных алгебраических уравнений, определение собственных значений и векторов матриц и др.), а также определение корней многочленов, решение нелинейных уравнений и систем, линейное программирование и другие оптимизационные модели и задачи.

Вторую группу составляют модели и задачи математического анализа, т.е. исследование функций и связанные с этим расчеты, в том числе решение дифференциальных и интегральных уравнений и вариационных задач.

Почему их считают бесконечномерными?

Разобраться в этом помогают широко используемые в математике геометрические образы и аналогии.

Наиболее эффективные способы вычислений в геометрии связаны с понятиями системы координат и вектора. Вектор на плоскости определяется парой, а в пространстве - тройкой чисел - компонентов, т.е. проекций на координатные направления. Вычисление суммы векторов (определяемой по правилу треугольника или параллелограмма) сводится к сложению их компонентов. Проекцию вектора на направление другого вектора удобно вычислять через их скалярное произведение, а длину - через скалярное умножение

вектора на себя, пользуясь свойством этой операции в прямоугольных координатах: скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их компонентов.

В линейной алгебре геометрические представления о векторе, его длине, скалярном произведении, углах переносят на любые объекты, описываемые наборами из n чисел для любого целого числа n . Наборы (n -ки) чисел называют n -мерными векторами (векторами в n -мерном пространстве), их сложение определяют как сложение компонентов, скалярное произведение - как сумму произведений компонентов, длину - как квадратный корень из скалярного квадрата, а углы между ними - как арккосинусы скалярных произведений, разделенных на длины. Т.е. свойства геометрических операций принимают за их определения, а первоначальные определения считают свойствами. Геометрическая терминология, конечно, не отражает никаких реальных свойств объектов, характеризующихся n числами, но наглядные геометрические представления, имеющиеся у нас для случаев $n=2$ и $n=3$, помогают упорядочивать информацию и находить методы и алгоритмы расчета.

В математических расчетах часто приходится иметь дело не только с конечными, но и с бесконечными наборами чисел (последовательностями, рядами). Их тоже рассматривают как элементы линейных (векторных) пространств бесконечной размерности (т.е. с бесконечным числом независимых базисных векторов). И здесь геометрические представления помогают получать важные результаты.

Дальнейшее обобщение этих геометрических понятий приводит к идущему от Д.Гильберта представлению о вещественной функции вещественного аргумента как о бесконечном упорядоченном наборе чисел и, следовательно, как о векторе в бесконечномерном пространстве. Действительно, что представляет собой, например, функция $y=2x+1$, заданная на интервале $[0, 1]$? Это - набор чисел 1, 3, 2, 1.5 и т.д., соответствующих значениям x 0, 1, 0.5, 0.25 и т.д.; значения аргумента x - это номера чисел из набора y ; способ написания номеров (индексов) в скобках для n -мерных векторов нам хорошо известен из программирования, но более привычно для нас обозначение компонентов вектора вида y_x . Вам не нравятся вещественные числа в качестве номеров? Но они ничем не хуже натуральных или целых.

Однако множество вещественных чисел (оно моделирует сплошную среду - континуум) несчетно: оно больше, чем множество натуральных, или целых, или рациональных чисел (имеет большую мощность, называемую мощностью континуума), вещественные числа нельзя перенумеровать. Так

что размерность пространства *всех* функций вещественного аргумента имеет мощность континуума; в него входят, например, такие экзотические элементы, как функция Дирихле, равная нулю в рациональных точках и единице - в иррациональных. В пространстве такой большой размерности не только нельзя найти решение какой-либо задачи, но и невозможно приблизиться к нему за конечное время.

С дифференциальными уравнениями связывают не любые, а непрерывные, и даже дифференцируемые, функции. Они составляют подпространство счетной размерности: в множестве непрерывных функций есть счетные базисы, один из них состоит из многочленов $1, x, x^2 \dots$, как следует из теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций многочленами. В счетном пространстве нельзя за конечное время найти точное решение задачи, но можно к нему приблизиться.

Упражнение. Дано дифференциальное уравнение $u'' - u - 1 = 0$ с граничными условиями $u(0) = 0, u'(1) = 0$. Подсчитайте, сколько в этой задаче неизвестных и сколько уравнений.

Таким образом, дифференциальные уравнения – характерный и практически наиболее важный класс бесконечномерных задач. В них определяют неизвестные функции, т.е. бесконечные наборы чисел, а дифференциальное уравнение - это сокращенная запись бесконечного множества уравнений (разные элементы этого множества представляют собой дифференциальное уравнение, записанное в различных точках расчетной области). Это важнейший момент, который надо иметь в виду при решении такой задачи. Отсюда следует, что в принципе нельзя точно решить дифференциальное уравнение за конечное время, только в отдельных редких случаях удастся подобрать известную хорошо изученную функцию – точное аналитическое решение, и именно такие случаи и изучают в соответствующем разделе высшей математики. Но абсолютная точность здесь и не требуется, потому что само дифференциальное уравнение – лишь приближенная модель реального объекта, оно изначально предназначено для приближенных расчетов. Требуется лишь соблюдать баланс между погрешностями аналитической модели и ее приближенного «численного» аналога, предназначенного для реального получения информации.

3.5.3. Основные подходы к решению дифференциальных уравнений

Так как решить бесконечномерную задачу за конечное время в принципе нельзя, то основной подход состоит в ее приближенной замене m уравнениями с n неизвестными.

Приближенную замену бесконечномерной проблемы по определению непрерывной функции на конечномерную задачу вычисления нескольких отдельных (дискретных) параметров этой функции называют *дискретизацией*.

В процессе дискретизации целесообразно четко выделить две стороны: переход к n неизвестным и замену дифференциального уравнения конечной системой уравнений (табл. 3.11), и во всем многообразии подходов к рассматриваемым задачам выделить несколько больших классов.

Таблица 3.11

Основные способы дискретизации

Переход к n неизвестным	Переход к n уравнениям
<p>1. Использование координатных функций: линейных представлений (ряды Фурье) или, редко, нелинейных. Искомая функция определена и непрерывна во всех точках расчетной области, ее производные вычисляются точно. Ищут все значения функции, но приближенно. Погрешности - за счет недостаточного (конечного) числа координат и уравнений.</p> <p>2. Метод сеток: ищут лишь n значений искомой функции, в некоторых точках расчетной области (узлах сетки).</p> <p>Хорошо соответствует удобному поточечному описанию конструкции. Погрешности – за счет недостаточного числа координат, уравнений и за счет приближенного вычисления производных.</p>	<p>А. Выполнение дифференциальных уравнений «в среднем», в целом по расчетной области (проекционный и вариационный подходы). Связь с вариационными постановками исходных задач, обоснование сходимости методов, оценки погрешности.</p> <p>В. Выполнение дифференциальных уравнений в отдельных точках (методы сеток, коллокаций). Простота дискретизованных уравнений. Хорошее соответствие удобному поточечному описанию исходной задачи.</p>

3. Метод конечных элементов (МКЭ) объединяет подходы 1 и 2	С. Метод конечных элементов объединяет подходы А и В.
--	---

Сочетание 1 + А, к которому относятся проекционный метод Б.Г. Галеркина, вариационные методы Ритца, Треффта и др., широко применялось в докомпьютерный период. Для многих задач удавалось получать вполне приемлемые решения при малом числе (3 - 5) неизвестных за счет тщательного подбора координатных функций. В некоторых случаях (например, для задач изгиба плит или для осесимметричных конструкций) удавалось найти ортогональные системы координатных функций и легко получать решения при большом числе неизвестных, так как дискретизованная система уравнений имела диагональную матрицу. Однако в большинстве случаев использование координатных функций оказалось слишком громоздким, дискретизованная система уравнений обычно имеет достаточно большое число неизвестных и заполненную матрицу, и к тому же описание свойств неоднородных конструкций и их сложных условий закрепления плохо согласуется с аналитическим заданием координатных функций сразу для всей расчетной области.

Сочетание 1 + В, называемое методом коллокаций, получило ограниченное применение по тем же причинам, а кроме того, из-за частых случаев вырожденности систем дискретизованных уравнений при неудачном подборе системы координатных функций.

Сочетание 2 + В, метод конечных разностей (метод сеток), использовал еще Л.Эйлер, но на этой основе не удавалось при отсутствии ЭВМ достаточно точно решать практически важные задачи из-за относительно большого числа неизвестных. В период компьютеризации ситуация резко изменилась. Оказалось, что хотя этот подход и связан с решением больших систем уравнений, но они имеют слабозаполненные матрицы и относительно быстро решаются; нашлись и многочисленные экономичные итерационные методы для таких систем. А поточечное (сеточное) задание функций хорошо сочетается с поточечным же описанием свойств конструкции и сложных граничных условий.

Заметим, что в методе сеток (методе конечных разностей, МКР) значения функций в промежутках между узлами не так уж неопределенны, для них неявно подразумевается интерполяция и плавное изменение функции. Здесь не обходятся без координатных функций, они нужны при интерполяции и чис-

ленном дифференцировании, но используются локально в окрестности отдельного узла и не распространяются на всю область. Эти вопросы в МКР стоят на заднем плане.

МКР и МКЭ показали себя как универсальные и эффективные подходы.

В данном пособии предпочтение отдано МКР, который имеет дополнительное преимущество простоты и наглядности. Вычислительные эксперименты на его основе помогают осмыслить как основные понятия математического анализа (функция, производная, интеграл, сходимость), так и физические понятия и законы (силы, напряжения, перемещения, деформации, равновесие, движение, сохранение энергии и др.).

В настоящее время вычислительный эксперимент рассматривают как новый способ теоретического исследования сложных процессов и явлений. В нем можно выделить несколько основных этапов. На первом этапе проводится выбор математической модели, т.е. приближенное описание процесса в форме алгебраических, дифференциальных или интегральных уравнений. Эти уравнения обычно выражают закон сохранения основных физических величин (энергии, количества тепла и т.д.).

Второй этап вычислительного эксперимента состоит в построении приближенного численного метода решения задачи, т.е. в выборе вычислительного алгоритма.

На третьем этапе осуществляется программирование вычислительного алгоритма на ЭВМ или составление исходных данных к уже существующим программам и на четвертом этапе - проведение расчетов на ЭВМ.

Наконец, в качестве пятого этапа вычислительного эксперимента можно выделить анализ полученных численных результатов и последующее уточнение математической модели. Может оказаться, что модель слишком груба - результат вычислений не согласуется с физическим смыслом, или модель слишком сложна, и решение с достаточной точностью можно получить при более простых моделях. Тогда следует начинать работу с первого этапа, т.е. уточнить математическую модель, и снова пройти все этапы.

Все эти этапы вычислительного эксперимента присутствуют в предлагаемых здесь лабораторных работах и расчетных заданиях.

При решении задачи на ЭВМ всегда получают не точное решение задачи, а некоторое приближенное решение. Чем же обусловлена возникающая погрешность? Можно выделить три основные причины возникновения погрешности при численном решении исходной математической задачи. Прежде всего, входные данные исходной задачи (начальные и граничные условия,

коэффициенты и правые части уравнений) всегда задаются с некоторой погрешностью. Погрешность численного метода, обусловленную неточным заданием входных данных, принято называть неустранимой погрешностью. Далее, при замене исходной задачи дискретной задачей возникает погрешность, называемая погрешностью дискретизации или, иначе, погрешностью метода. Наконец, конечная разрядность чисел, представляемых в ЭВМ, приводит к ошибкам округления, которые могут нарастать в процессе вычислений.

Данный практикум из всего многообразия численных методов для бесконечномерных задач останавливается на численном интегрировании и методе конечных разностей (МКР) для обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Основные понятия этих методов будут использоваться в дальнейшем при изучении курсов строительной механики и теории упругости.

3.5.4. Эффективность дискретизации бесконечномерных моделей. Вариационно-разностные схемы на основе сверхсходимости

3.5.4.1. Общие положения

Дискретизация, т.е. приближенная замена n уравнениями с n неизвестными, – основной элемент бесконечномерных математических моделей, к которым относятся дифференциальные уравнения и вариационные принципы, составляющие основу моделирования конструкций. В табл. 5.1 представлены ее основные идеи, сформировавшиеся со времен Ньютона, Эйлера и Лагранжа.

Локальные подходы к дискретизации отличаются универсальностью и технологичностью, они в наибольшей степени соответствуют наиболее употребительному поэлементному и поточечному описанию свойств конструкций, и на них сместился центр тяжести исследований и применений с появлением ЭВМ.

В методе сеток (или конечных разностей – МКР), известном со времен Ньютона и Эйлера, стали применять вариационный подход (ВРМ 2) для облегчения стыковки элементов конструкций, упрощения получения разностных уравнений, разработки и обоснования сходимости итерационных алгоритмов [5.1 – 5.8].

В методе конечных элементов (МКЭ, ВРМ 1) стремились, основываясь на работе Куранта [5.9], получать простые, но математически последователь-

ные и обоснованные, схемы дискретизации, близкие по свойствам к схемам МКР.

5.5.4.2. Особенности построения, сходимости и точности МКЭ

Первые применения простейших линейных аппроксимаций с треугольными конечными элементами (КЭ) к простым задачам с прямоугольными областями [5.10, 5.11] дали достаточно точные результаты, совпадавшие с конечно-разностными решениями. Этот метод завоевал огромную популярность как наиболее математически последовательный, соединяющий преимущества локальных и глобальных аппроксимаций, и удобный в применении численный метод расчета конструкций. Однако с усложнением задач появлялись неожиданные осечки – эффекты «жесткого смещения» в криволинейных координатах, «сдвиговой блокировки» при попытках применить пространственные конечные элементы (КЭ) к расчету тонкостенных конструкций и др. Они выражались в огромных погрешностях (сотни и тысячи процентов) при разумной густоте сетки, несмотря на сходимость с теоретической скоростью. Кроме того, последовательное применение идеи [5.9] к дифференциальным уравнениям четвертого порядка (к расчетам плит и оболочек) приводило к слишком сложным схемам и алгоритмам из-за требования межэлементной непрерывности производных. Большое количество публикаций было посвящено восстановлению разумной точности схем МКЭ при сохранении максимальной простоты. Для этого либо отбрасывали некоторые члены в аппроксимирующих функциях, либо допускали разрывы производных (несовместные КЭ), либо применяли смешанные вариационные формулировки (гибридные КЭ, моментная схема МСКЭ) или сокращенное интегрирование [5.12 – 5.14], т.е. отступали от основополагающей идеи [5.9], приближая МКЭ к МКР.

Характерный случай – потеря точности при использовании трехмерных КЭ для тонкостенных конструкций и двумерных КЭ для расчета стержней и исправление этого в моментной схеме МКЭ [5.12]. В простейшем четырехугольном КЭ при построении координатных функций используют билинейную аппроксимацию перемещений, ей соответствуют линейные распределения деформаций по области КЭ. При расчете стержня применяют удлиненный КЭ (рис. 3.70, а). Он должен хорошо описывать состояние чистого изгиба: растяжение верхних и сжатие нижних волокон (рис. 5.1, б), которому соответствует аппроксимация перемещений $u_1 = cx_1x_2$, $u_2 = a + bx_1$ и деформаций $e_1 = cx_2$, $e_2 = 0$, $e_{12} = 0.5(b + cx_1)$. При линейной аппроксимации перемещений не удастся обеспечить везде $e_{12} = 0$ одновременно с $e_1 = cx_2$, для этого нужно квадратичное приближение для u_2 . Хорошее представление изгиба (растяжение верхних и сжатие нижних волокон) невозможно без сильно искаженного представления деформаций сдвига, как показывают приведенные на рис. 3.70, в, г графики деформаций чистого изгиба для балки, аппроксимированной тремя прямоугольными элементами. Разрывы e_{12} явно плохо отражают реальное плавное изменение этой величины; они растут при увеличении относительной длины КЭ, вносят свой вклад в энергию деформирования и создают большую фиктивную изгибную жесткость, часто в десятки раз большую, чем истинная. Предложенное в [5.12] тщательно обоснованное отбрасывание лишних членов в аппроксимации деформаций, названное моментной схемой конечных элементов (МСКЭ), возвращает точность в разумные пределы; но это – отступление от исходной идеи МКЭ как метода Рунге. К тому же подход МСКЭ недостаточно технологичен, он требует тщательного анализа отбрасываемых членов для каждой конкретной задачи.

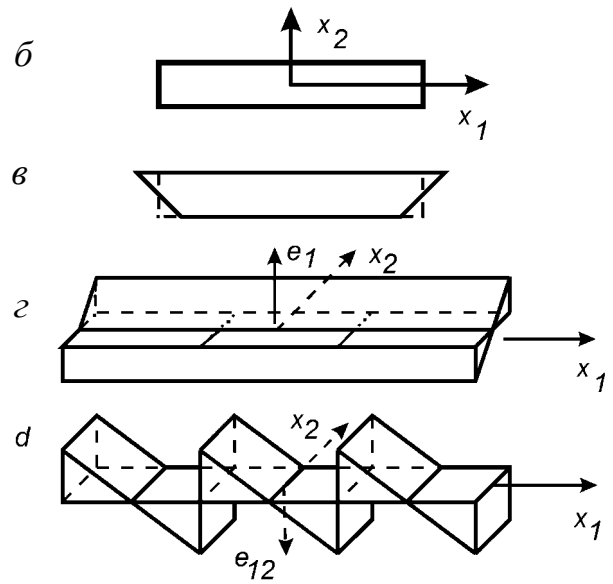


Рис. 3.70

В МКЭ существует иллюзия сверхуниверсальности за счет возможности стыковки КЭ разных типов. В действительности такая стыковка приводит к резкой потере точности. Чтобы разрешающие разностные уравнения имели малую погрешность, нужно соблюдать принцип однородности: аппроксима-

ции величин в соседних элементах должны иметь близкие погрешности, они при получении разрешающих уравнений вычитаются, и получается хорошая точность этих уравнений. Это положение относится и к МКР, там оно более очевидно и исключает иллюзии.

С другой стороны, проблемы точности значительно уменьшаются в схемах МКЭ повышенных порядков аппроксимации – конечно, за счет усложнения. Большинство разработанных на сегодня универсальных программ расчета конструкций основано на МКЭ, во многом благодаря выработанной на этом пути технологии разработки алгоритмов. В примерах в конце гл. 4 приведены некоторые данные о возможных погрешностях, дающие первоначальную ориентировку. Простой и универсальный способ практической оценки погрешности полученного решения – сравнение результатов на сетках разной густоты (обычно с шагом h и $h/2$).

3.5.4.3. Построение и погрешности вариационно-разностных схем в форме МКР

Особенности вариационно-разностного метода 2 (ВРМ 2) – приближенное вычисление производных и численное интегрирование. При таком подходе чисто вариационные соображения о минимизации энергетического функционала в подпространствах допустимых функций не гарантируют сходимости приближенных решений к точному; для обоснования и оценок скорости сходимости привлекают подходы, выработанные в невариационной теории МКР. Зато при правильной реализации вариационные схемы МКР дают максимальную точность при максимальной простоте и минимальных затратах. При примерно одинаковых схемах аппроксимации порядок сходимости решений ВРМ 2 на единицу выше.

После появления МКЭ интерес механиков к МКР сильно уменьшился. Но в области нестационарных и динамических задач механики сплошных сред МКР оставался вне конкуренции благодаря полунявным методам, обеспечивающим высокую точность при минимальных затратах, и очень неудобным в интерпретации МКЭ. В расчетах сложных конструкций МКР стабильно давал надежные результаты с хорошей точностью [5.2]. Эффекты типа жестких смещений и блокировок здесь проявляются в значительно меньшей степени, чем в МКЭ.

В статике с появлением ЭВМ и усложнением решаемых задач “чистый” МКР, примененный к дифференциальным уравнениям, быстро уступил место вариационно-разностному подходу. “Чистый” МКР оказался недостаточно

технологичным из-за необходимости проработки большого количества деталей при выводе разностных уравнений в случаях неоднородности и анизотропии, неоднозначности дискретизации граничных условий и условий стыка областей и вытекающей отсюда сложности и недостаточной универсальности алгоритмов и программ расчета.

Вариационно-разностный подход позволил снять многие трудности вывода разностных уравнений, учета граничных условий, стыковки областей и упростить технологию программирования, приблизив ее к технологии МКЭ [5.1, 5.2]. В нестационарных задачах преимущества этого подхода используются при аппроксимации по пространственным переменным, увеличивая точность и надежность расчетов за счет энергетической согласованности разностных схем.

Сейчас очевидно, что стабильная точность в МКР – результат последовательного подхода, обеспечивающего минимальные потери точности на всех этапах: при интерполяции, численном дифференцировании и численном интегрировании. Это стало совершенно ясно после осознания и последовательного применения точек сверхсходимости производных [5.15]. Этот вопрос подробнее обсуждается в последующих разделах.

Одна из основных задач диссертации – разработка ВРС класса ВРМ-2, обеспечивающих наиболее высокую точность и универсальность применительно к поставленным задачам расчета конструкций. В них удалось за счет использования точек сверхсходимости производных и учета особенностей рассматриваемых классов задач добиться оптимального сочетания точности численного дифференцирования и численного интегрирования при аппроксимации функционалов и вариационных уравнений, определяющих вариационные формулировки. Изученные ВРС высоких порядков подтверждают универсальность предлагаемого принципа их получения. Реализованные наиболее простые ВРС второго порядка и выполненные расчеты модельных и реальных конструкций стабильно показывают достаточно точные результаты и подтверждают ожидаемую скорость сходимости второго порядка.

В целом ВРМ в форме МКР представляется более последовательным, чем МКЭ, и обычно он дает более точные решения при одинаковых затратах. Но главная причина, требующая развивать форму МКР, – настоятельная потребность в альтернативных подходах к дискретизации для взаимной проверки и обеспечения надежности получаемых результатов. А выработанная в

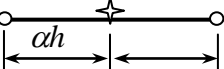
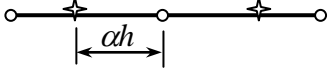
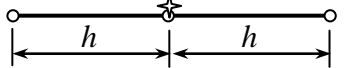
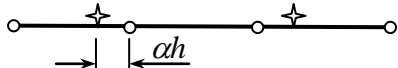
МКЭ доступная и универсальная технология составления дискретизованных уравнений в полной мере пригодна и для ВРМ 2.

Особенности ВРМ 2 – приближенное вычисление производных и численное интегрирование. При таком подходе чисто вариационные соображения о минимизации энергетического функционала в подпространствах допустимых функций не гарантируют сходимости приближенных решений к точному; для обоснования и оценок скорости сходимости привлекают подходы, выработанные в невариационной теории МКР. Зато при правильной реализации вариационные схемы МКР дают максимальную точность при максимальной простоте. При примерно одинаковых схемах аппроксимации порядок сходимости решений ВРМ 2 на единицу выше.

3.5.4.4. Сверхсходимость производных

Известно, что порядок скорости убывания погрешности производной при сгущении сетки на единицу меньше, чем порядок погрешности интерполяции. Однако в некоторых точках повышенной точности, или сверхсходимости, эти порядки совпадают [5.15]. Некоторые такие точки показаны в табл. 3.12.

Таблица 3.2

u', u''	Точки сверхсходимости	α	Погрешность
u'		$1/2$	$-\frac{1}{24}h^2u'''(\xi)$
u'		$1/\sqrt{3}$	$\frac{\alpha}{36}h^3u^{IV}(\xi)$
u''			$-\frac{1}{12}h^2u^{IV}(\xi)$
u''		$\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{5}{3}}-1\right)$	$\frac{217\alpha}{4320}h^3u^V(\xi)$

В четырехугольных ячейках сетки существуют линии и поверхности сверхсходимости (рис. 3.71). Точки и линии сверхсходимости суммы $u'_x + u'_y$ и смешанной второй производной в четырехугольнике и шестиграннике расположены на пересечении линий и поверхностей сверхсходимости отдельных производных (пример – восьмиконечная звезда Z на рис. 3.71).

В треугольной и тетраэдральной ячейках сетки нет линий и поверхностей сверхсходимости – там не хватает информации для уточненного дифференцирования внутри ячейки. Поэтому четырехугольные сетки работают лучше треугольных как в МКР, так и в МКЭ; в расчетных программах МКЭ по умолчанию везде, где можно, стоят четырехугольные элементы, а для ап-

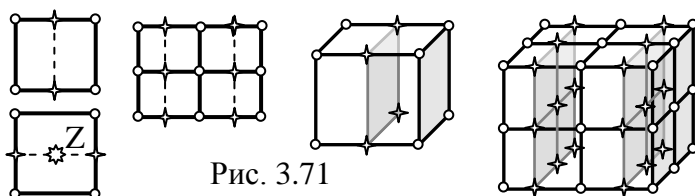


Рис. 3.71

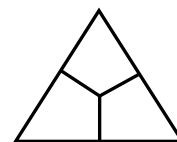


Рис. 3.72

проксимации треугольных областей нередко рекомендуется схема (рис. 3.72), хотя раньше считалось, что треугольные элементы наиболее универсальны.

3.4.5. Принцип построения ВРМ 2

Использование точек сверхсходимости производных в качестве узлов численного интегрирования позволяет аппроксимировать с повышенной точностью вариационное уравнение или функционал, а значит, и соответствующие дифференциальные уравнения. В частности, одномерные двухузловые, двумерные четырехугольные и трехмерные шестигранные ячейки сетки дают аппроксимацию дифференциальных уравнений и сходимость приближенных решений (как искомой функции, так и ее производных) к точному порядка $O(h^2)$, трехузловые – порядка $O(h^3)$, а иногда и выше.

Точки сверхсходимости производных совпадают с оптимальными (гауссовыми) или частично оптимальными узлами одномерного численного интегрирования. Использование *всех* этих узлов обеспечивает полный учет информации о деформировании конструкции и невырожденность ее матрицы жесткости. Внутри ячейки есть точки, в которых производные всех направлений вычисляются с повышенной точностью (интерполяцией из основных узлов сверхсходимости на ребрах). Но в них не содержится полная информация о возможных деформированиях ячейки, их недостаточно для невырожденной аппроксимации энергии деформирования. *Этот факт не был учтен в работах, предлагавших «сокращенное интегрирование» для повышения точности схем МКЭ, и данный способ оказался ненадежным [5.16], но в таком виде он присутствует до сих пор в конечноэлементных расчетных программах наряду с точным интегрированием, дающим всегда хорошо обусловленные матрицы жесткости, но иногда – огромные погрешности. По умолча-*

нию в хороших программах используют гибридный способ формирования конечного элемента или более высокие (чем первый) порядки аппроксимации.

В физически нелинейных задачах энергию деформирования обычно нельзя разделить на слагаемые, зависящие от отдельных производных, и для вычисления энергии ячейки приходится использовать информацию из соседних ячеек, что расширяет шаблоны сеточных уравнений, несколько усложняя алгоритмы решения по сравнению с физически линейными задачами [5.17].

3.5.4.6. Особенности задач и качество аппроксимации

Очевидный общий принцип реального достижения высокой точности аппроксимации бесконечномерных моделей – максимальный учет особенностей рассматриваемого класса задач.

Практика разработки и применения ВРМ 2 показывает, что необходимое в линеаризованных задачах разделение энергии деформирования на слагаемые, вычисляемые в разных точках сверхсходимости, не должно быть слишком мелким. Не следует по отдельности аппроксимировать разные слагаемые одного и того же компонента тензора деформаций, это приводит к значительному усилению «эффекта жесткого смещения» при использовании криволинейных координат [5.18]. Например, не следует вычислять в разных точках слагаемые выражений вида

$$e_x = \partial u / \partial x + k_x w \quad \text{или} \quad \gamma_{xy} = \partial u / \partial y + \partial v / \partial x \quad (1)$$

Для вариационных постановок с первыми производными от разрешающих функций энергия ячейки сетки зависит от степеней свободы этой ячейки, и это упрощает унификацию алгоритмов формирования уравнений. Если вариационное уравнение содержит вторые производные, то, с точки зрения ВРМ 2, для их вычисления в точках сверхсходимости естественно использовать значения функций из своей и соседних ячеек, предполагая непрерывность первых производных. Вопрос об обеспечении межэлементной непрерывности в этом случае не стоит. Недостаток этого подхода – в необходимости дополнительно предусматривать обработку тех случаев, когда первые производные должны иметь разрывы (например, шарнирное соединение плит). Можно использовать пересекающиеся ячейки (конечные элементы) и при аппроксимации высоких порядков функционалов с первыми производными, но численные эксперименты не показали при этом никаких преимуществ по сравнению с непересекающимися.

Для повышения универсальности ВРМ 2 целесообразно обеспечивать повышенную точность интегрирования вдоль линий и поверхностей сверх-

сходимости, она может значительно влиять на качество решения в некоторых особых случаях, так как энергетический функционал зависит от квадратов производных. В частности, при моделировании оболочки одним слоем ячеек сетки ВРС с простейшим интегрированием тангенциальных деформаций (равных нулю на срединной поверхности) по толщине по формуле трапеций изгибная жесткость завышается в три раза, а добавление одного узла и применение формулы парабол обеспечивает точное моделирование уравнений оболочек Кирхгофа – Лява [5.18].

Уравнения оболочек с учетом поперечного сдвига естественно получаются при аппроксимации одним слоем ячеек сетки. Но для обеспечения максимальной точности нужно сеточные уравнения модифицировать с учетом дополнительной информации – заданных напряжений на обеих лицевых поверхностях. При этом линейные аппроксимации поперечных деформаций заменяются на квадратичные, и для интегрирования энергии поперечного сдвига лучше применять формулу четвертого порядка с пятью узлами. В неоднородных и слоистых оболочках деформации и напряжения по толщине лучше представлять кусочно-линейными и кусочно-непрерывными функциями, уточняя, как это принято, их распределение с учетом уравнений равновесия или частичной минимизацией энергии деформирования. Таким образом получают наилучшие двухпараметрические аппроксимации, которые целесообразно дальше уточнять за счет добавления параметров – сгущения сетки по толщине, применяя для решения уравнений многосеточный итерационный подход.

В анизотропных и нелинейных задачах нельзя обойтись без хранения и обработки распределения НДС по толщине, и нет смысла ограничиваться двухпараметрической оболочечной аппроксимацией трехмерной задачи, лучше сразу ориентироваться на многосеточные итерации, дающие с теми же затратами более точное решение.

Таким образом, аппроксимация одним слоем пространственных ячеек сетки с учетом особенностей объекта – самый простой, удобный и точный способ моделирования оболочек.

Но с уменьшением толщины ухудшаются вычислительные свойства дискретизованной системы уравнений, ее обусловленность. Первая причина – разности близких чисел в сеточных уравнениях – устраняется заменой переменных

$$\mathbf{u}^{\circ} = (\mathbf{u}^H + \mathbf{u}^{\epsilon}) / 2, \quad \boldsymbol{\theta} = (u^{\epsilon} - u^H) / h, \quad (2)$$

(n , v – нижняя и верхняя поверхности оболочки, h – толщина), так, чтобы эти разности стали независимыми переменными. Вторая причина ухудшения – относительно медленное уменьшение энергии деформаций поперечного сдвига. При малой толщине сдвиговую жесткость принимают бесконечной, т.е. деформации сдвига нулевыми. Такое дополнительное условие изменяет систему уравнений, позволяя исключить часть неизвестных (с улучшением обусловленности), но усложняя уравнения, в которых появляются четвертые производные от перемещений. Данный порядок рассмотрения вопроса расчета оболочек не совпадает с историей его развития (от теории Кирхгофа – Лява к уточненным моделям), но при численном моделировании и расчете оболочек лучше соответствует сути дела и помогает более сознательно проектировать алгоритмы.

3.5.4.7. Характерные примеры

Для модельного уравнения $u'' - u - 1 = 0$ с граничными условиями $u(0)=0$, $u(1)=0$ численный эксперимент с ВРС второго порядка, в которой производные вычислялись в центрах интервалов и значения u интерполировались туда же, а интеграл определялся по односточечной формуле Гаусса, подтвердили сходимость второго порядка функции u и ее производных к точному решению. Такая же скорость сходимости проявлялась в ВРС расчета оболочек [5.2, 5.18, 5.19].

Для этого же уравнения аппроксимация функционала трехточечными

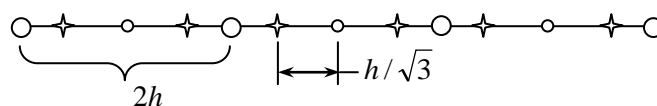


Рис. 3.73

формулами (табл. 3.12, строка 2; рис. 3.73) с погрешностью третьего порядка дала скорость сходимости функции u четвертого и ее производных – третьего порядка [5.19]. Это очень любопытный момент, так как разностные уравнения, полученные по данной схеме, аппроксимируют дифференциальное уравнение с погрешностью второго порядка. Более внимательное изучение показало, что знаки погрешностей в соседних точках противоположные, так что в среднем они взаимно уничтожаются, и точность приближенных решений очень высокая и быстро растет при сгущении сетки.

Для уравнения Лапласа основные моменты построения ВРС третьего

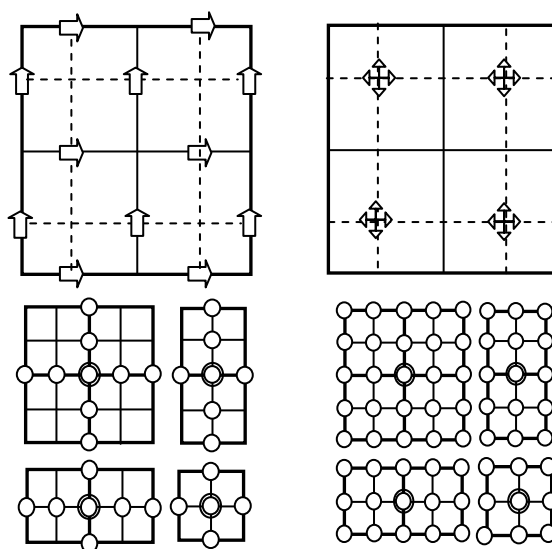


Рис. 3.74. Ячейка сетки с узлами интегрирования и структуры шаблонов вариационно-разностных уравнений ВРС 3 и 4 для уравнения Лапласа

порядка представлены на рис. 3.74.

На рис. 3.74 стрелками помечены точки свёрхсходимости производных, выбранные для численного интегрирования. На левой схеме производные разных направлений вычисляются в различных точках, при этом получаются наиболее компактные шаблоны сеточных уравнений. На правой схеме для интегрирования используются четыре точки с повышенной точностью для производных обоих направлений; они совпадают с Гауссовыми точками численного интегрирования. В данном случае этого достаточно для невырожденности дискретизованной задачи: для определения девяти узловых значений функции u необходимо хотя бы одно условие вида $u = u^*$, и восемь линейных связей обеспечиваются используемыми в вариационной постановке восемью производными. Расширение шаблонов незначительно усложняет задачу, зато второй вариант значительно проще при учете неоднородности, анизотропии и нелинейности.

Для плоской задачи теории упругости (рис. 3.75) четырех точек с повышенной точностью обеих производных недостаточно для полного представления энергии деформирования. Ячейка имеет 18 степеней свободы, в данной задаче должно быть хотя бы три условия закрепления и, значит, не менее 15 квадратичных членов в энергии; а в указанных четырех точках всего 12 деформаций. На левой схеме представлен минимальный набор высокоточных деформаций для невырожденной аппроксимации энергии деформирования; угловые деформации зависят от производных обоих координатных направлений, для них в ячейке есть только четыре точки сверхсходимости. На правой схеме – расширенный набор, для улучшения аппроксимации в особых

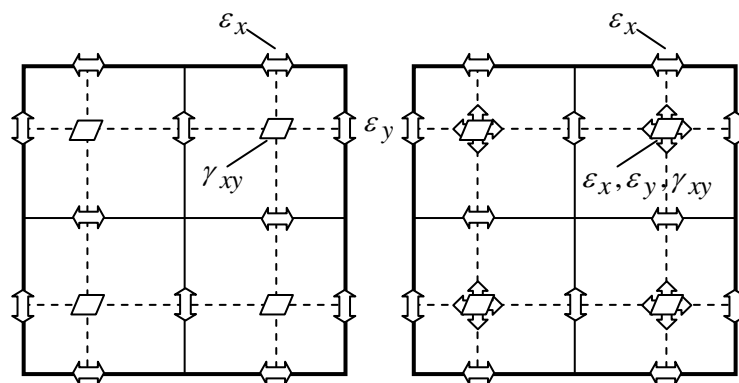


Рис. 3.75. Точки сверхсходимости для определения деформаций и их численного интегрирования в ВРС 3 и 4 для плоской задачи теории упругости

случаях и повышения тем самым универсальности ВРС.

Схемы ВРМ 2 второго порядка подтвердили свою высокую эффективность в многочисленных расчетах пологих и непологих оболочечных конструкций с разрывными параметрами (ребра, ступенчато-переменная толщина и др.) как в линейной постановке, так и с учетом физической и геометрической нелинейностей [5.1 – 5.7, 5.18].

Родственный невариационный подход к дискретизации дал сходные результаты в [5.20].

В [5.21, 5.22] развит невариационный подход МПА (метод последовательных аппроксимаций), близкий к ВРМ 2 по простоте и универсальности технологии расчета. В нем повышенная точность решения, аналогичная ВРМ 2, достигается за путем добавления неизвестной производной на каждом трехточечном интервале для аппроксимации вторых производных с погрешностью $O(h^2)$ на всем этом интервале (а не только в точках сверхсходимости). Это упрощает реализацию метода при переменных и разрывных параметрах, но увеличивает количество неизвестных и заполненность матрицы

коэффициентов разностных уравнений, повышая требования к ресурсам ЭВМ. Дифференциальное уравнение четвертого порядка аппроксимируется последовательным применением полученных формул численного дифференцирования для вторых производных, что значительно упрощает технику получения разрешающих разностных уравнений. По смыслу она близка к технике ВРМ 2 но, по нашему мнению, уступает в универсальности.

Приведенные примеры иллюстрируют основные идеи и характеризуют круг вопросов, относящихся к разработке ВРМ 2. Более сложные схемы для пространственной задачи, оболочек и криволинейных координат не представлены ввиду громоздкости; нецелесообразно здесь представлять технические детали.

Выводы. Вариационно-разностный метод 2, основанный на систематическом использовании точек сверхсходимости производных в качестве узлов численного интегрирования слагаемых энергии деформирования, дает дискретизованные модели повышенной точности, с погрешностью аппроксимации дифференциальных уравнений и со скоростью сходимости приближенных решений к точному не ниже 2 порядка. Схемы МКЭ аналогичных порядков более сложны и трудоемки, имеют более широкие профили матриц жесткости.

Одно из правил хорошей аппроксимации – максимальный учет особенностей рассматриваемого класса задач. Различные уточнения общего подхода и эмпирические правила повышают универсальность ВРС в рамках данного класса задач и являются необходимым элементом дискретизации.

В целом ВРМ в форме МКР, с использованием сверхсходимости, нам представляется более последовательным, чем МКЭ, и обычно он дает более точные решения при одинаковых затратах. Но главная причина, требующая развивать форму МКР, – настоятельная потребность в альтернативных подходах к дискретизации для взаимной проверки и обеспечения надежности получаемых результатов.

Литература к ГЛАВЕ 3

- 3.1. Клейн Г.К., Рекач В.Г., Розенблат Г.И. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики. М.: Высшая школа, 1972. 312 с.
- 3.2. Безухов Н.И., Лужин О.Н., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. М.: Высшая школа, 1987. 260 с.
- 3.3. Феодосьев В.И. Соппротивление материалов. М.: Наука, 1964. 540 с.
- 3.4. Мустафаев А.А. Расчет оснований и фундаментов на просадочных грунтах. М.: Высшая школа, 1979. 368 с.
- 3.5. Бартоломей А.А. Механика грунтов. М.: АСВ, 2003. 270 с.
- 3.6. Рейтман М.И., Шапиро Г.С. Методы оптимального проектирования деформируемых тел. – М.: Наука, 1976. – 266 с.
- 3.7. Сергеев Н.Д., Богатырев А.И. Проблемы оптимального проектирования конструкций. – Л.: Стройиздат, 1971. – 156 с.
- 3.8. Рабинович И.М. Курс строительной механики. – М.: Стройиздат, 1954. – Ч.2. – 544 с.
- 3.9. Радциг Ю.А. Статически неопределимые фермы наименьшего веса. – Казань: КГУ, 1969. -287 с.
- 3.10. Хуберян К.М. Метод напряжений. // Исследования по теории сооружений. – М. – Л.: Стройиздат, 1949.- Вып.4. – С. 120 -135.
- 3.11. Арман Ж.-Л.П. Приложение теории оптимального управления системами с распределенными параметрами к задачам оптимизации конструкций. – М.: Мир, 1977.- 142 с.
- 3.12. Болотин В.В., Гольденблат И.И., Смирнов А.Ф. Строительная механика. Современное состояние и перспективы развития.- М.: Стройиздат, 1972.- 190 с.
- 3.13. Виноградов А.И. Проблема оптимального проектирования в строительной механике. – Харьков: Вища школа, 1973. -167 с.
- 3.9. Гольштейн Ю.Б., Соломещ М.А. Вариационные задачи статики стержневых систем. – Л.: Изд. ЛГУ, 1980.- 208 с.
- 3.10. Хог Э., Арора Я. Прикладное оптимальное проектирование. – М.: Мир. 1983. – 480 с.
- 3.11. Чирас А.А., Баркаускас А.Э., Каркаускас Р.П. Теория и методы оптимизации упругопластических систем. – Л.: Стройиздат, 1974. – 279 с.
- 3.12. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
- 3.13. Абовский Н.П., Енджиевский Л.В., Савченков В.И. и др. Регулирование. Синтез. Оптимизация. - М.: Стройиздат, 1993. - 456 с.
- 3.14. Каплун А.Б., Морозов Е.М., Олферьева М.А. ANSYS в руках инженера: практическое руководство. Изд. 2-е, испр. М.: Едиториал УРСС, 2004. – 272 с.
- 3.15. Абовская С.Н. Сталежелезобетонные конструкции (панели и здания), учебное пособие с грифом УМО // Красноярск 2000. - 460 с.

3.16. Перельмутер А.В. Расчетные модели сооружений. Возможность их анализа / А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер. Киев: Изв. вузов «Сталь», 2002. 600 с.

3.17. Назаров Д.И. Обзор современных программ конечно-элементного анализа // САПР и графика. 2000. № 2. С. 52 – 55.

3.18. Соболев И.М. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями / И.М. Соболев, Р.Б. Статников. М.: Наука, 1981. 110 с.

3.19. Деруга А.П. Программа расчета анизотропных ребристых оболочечно-стержневых систем: Сб. науч. тр. «Пространственные конструкции в Красноярском крае» / А.П. Деруга, В.Е. Базанов, М.Е. Куликов, А.В. Максимов / КИСИ. Красноярск, 1992. С. 58 – 65.

3.20. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 544 с.

4.6. Фондер Г.А. Явное добавление смещений тела как жесткого целого в криволинейных конечных элементах / Г.А. Фондер, Р.В. Клауф // Ракетная техника и космонавтика. 1973. № 3. С. 62 – 72.

3.21. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоцкий, В.В. Киричевский. Киев: Вища шк., 1982. 480 с.

3.22. Гоцуляк Е.А. Применение метода криволинейных сеток к расчету оболочки / Е.А. Гоцуляк, В.Н. Ермишев, Н.Т. Жадрасинов. Киев, 1981. 21с. (Рук. деп. в УкрНИИНТИ. № 2557).

3.23. Сахаров А.С. Исследование устойчивости оболочек методом конечных элементов в задачах пластин и оболочек / А.С. Сахаров, Н.А. Соловей: В кн. «Пространственные конструкции зданий и сооружений». М., 1977. Вып. 3. С. 10–15.